ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE

1, Rampe Salah Gherbi, Agha, Alger

THEORIE DES JEUX

ET

ECONOMIE DE L'INFORMATION

Notes de Cours

Abdelkader GLIZ

Octobre 2010

Table des matières

Préface 4

Introduction 5

Première Partie : Théorie des jeux 6

Chapitre 1 : Jeux simultanés à information complète, théorie 8

1.1. La forme normale d'un jeu 8
1.2. L'équilibre en stratégies dominantes 10
1.3. L'équilibre de Nash en stratégies pures 13
1.4. L'équilibre de Nash en stratégies mixtes 15
1.4.1. La notion de stratégie mixte 15
1.4.2. Détermination de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes 19
1.5. L'équilibre de Nash avec « mains tremblantes » 24
1.6. L'existence de l'équilibre de Nash 26

Chapitre 2 : Jeux simultanés à information complète, applications 29

2.1. L'enchère au second prix 29
2.2. Le modèle de duopole (concurrence imparfaite) de Cournot 30
2.3. Le modèle de duopole de Bertrand 33
2.4. Le problème des commons 35
2.5. Le jeu de l'inspection 38
2.6. Le jeu de coordination et équilibres de Nash multiple 40

Chapitre 3 : Jeux dynamiques à information complète 41

3.1. La forme extensive 42
3.1.1. La forme extensive d'un jeu dynamique 42
3.1.2. Représentation d'un jeu statique par la forme extensive 43
3.1.3. La notion de sous-jeu 45
3.2. Jeu séquentiel à information complète et parfaite 46
3.2.1. La procédure de Récurrence vers l'amont (Backwards induction) 46
3.2.2. Application de la récurrence vers l'amont : le modèle de duopole de Stackelberg 48
3.3. L'Equilibre de Nash Parfait (SPNE) 50
3.3.1. Représentation d'un jeu dynamique par la forme normale 51
3.3.2. Détermination de l'Equilibre de Nash Parfait pour un jeu dynamique à information complète et parfaite 51
3.3.3. Le jeu de prédation (guerre des prix) 53
3.4. Jeux répétés 55
3.4.1. Jeux répétés deux fois 55
3.4.2. Jeux infiniment répétés 56
3.4.3. Application : la collusion dans un duopole en quantité 61

Chapitre 4 : Jeux simultanés à information incomplète 63

4.1. Exemples de jeux bayésiens : jeu de free riding et duopole de Cournot avec asymétrie de l'information 63
4.1.1. Jeu de free riding avec asymétrie de l'information 64
4.1.2. Duopole de Cournot avec asymétrie de l'information 66
4.2. La forme normale d'un jeu statique à information incomplète 69
4.3. L'équilibre de Nash bayésien 72
4.3.1. La stratégie dans un jeu bayésien 72
4.3.2. L'espérance de paiement dans un jeu bayésien 74
4.3.3. L'équilibre de Nash bayésien 74
4.4. Application : Le modèle de Cournot selon l'approche de Harsanyi 79

Chapitre 5 : Jeux dynamiques à information incomplète 82

5.1. L'importance des croyances dans le concept d'équilibre d'un jeu dynamique à information incomplète 82
5.2. L'insuffisance de la perfection en sous-jeux dans un jeu dynamique à information incomplète 84
5.3. L'équilibre bayésien parfait au sens faible 86
5.4. Equilibre bayésien parfait et croyances hors sentier d'équilibre 89
5.5. L'équilibre séquentiel et l'équilibre parfait avec «mains tremblantes» 92
5.6. Les jeux de signaux 93
5.6.1. Définition et caractéristiques d'un jeu de signal 94
5.6.2. L'équilibre bayésien parfait d'un jeu de signal et typologie des équilibres 95
5.6.3. Raffinements des équilibres d'un jeu de signal 102

Deuxième Partie : Modèles de l'économie de l'information 106

Chapitre 6 : Le phénomène de sélection adverse 107

6.1. L'asymétrie de l'information et le modèle de sélection adverse de Akerlof 108
6.2. L'équilibre du marché en cas d'asymétrie de l'information 110
6.3. Asymétrie de l'information et réduction de bien-être 113

Chapitre 7 : Asymétrie de l'information et équilibre du marché des assurances 116

7.1. Les données de base du modèle de Rothschild et Stiglitz 116
7.2. Asymétrie de l'information et phénomène de sélection adverse en assurance 118
7.3. Equilibres séparants et équilibres mélangeants 123

Chapitre 8 : Le modèle de signal de Spence 127

8.1. Les données de base du modèle de signal 127
8.2. Le cas de symétrie de l'information 132
8.3. Le cas de l'asymétrie de l'information 133
8.4. Les équilibres bayésiens parfaits 134
8.5. Raffinements des croyances hors équilibre et sélection des équilibres 140
8.6. L'impact du signal sur le bien-être 142

Chapitre 9 : La théorie de l'agence 145

9.1. L'effort de l'agent, une information asymétrique 145
9.2. Relation principal / agent en cas d'observabilité de l'effort 147
9.3. Relation principal / agent en cas de non observabilité de l'effort 150
9.3.1. Modèle de l'aléa moral en cas avec deux niveaux d'effort 150
9.3.2. Modèle de l'aléa moral en cas d'effort continu 154
9.4. Application 1 : aléa moral et rationnement du crédit 157
9.5. Application 2 : aléa moral et structure de la propriété des entreprises 161
9.5.1. Les coûts d'agence des actions externes 163
9.5.2. Le rôle du monitoring et de l'engagement dans la réduction des coûts d'agence .. 168
9.5.3. Les coûts d'agence de la dette 169
9.5.4. Une théorie de la structure de la propriété basée sur les coûts d'agence 170

Chapitre 10 : Les mécanismes d'enchères 172

10.1. Les différentes formes d'enchères 172
10.2. Les enchères, jeu non coopératif à information incomplète 173
10.3. L'espérance de revenu dans le modèle à valeurs privées indépendantes 174
10.4. La sous enchère des acheteurs potentiels 180
10.5. La surestimation du prix de réserve du vendeur 181
10.6. Le cas de l'aversion pour le risque 182
10.7. L'espérance de revenu du vendeur avec des évaluations subjectives uniformes ... 182
Annexe au chapitre 10 184

Références 186

Exercices 189

Préface

Le présent document de travail représente les *notes de cours* du module « Economie de l'Information » que j'assure dans le cadre du programme de Magister de l'Ecole Supérieure de Commerce d'Alger. Il inclut également quelques uns des thèmes abordés dans un autre cours de Magister, en l'occurrence le cours de « Théorie Financière de l'Entreprise ». C'est le cas par exemple des applications du modèle de l'aléa moral (chapitre 9).

Bien que l'intitulé du cours soit « Economie de l'Information », la première partie est consacrée à la théorie des jeux, car celle-ci constitue un puissant outil d'analyse et de compréhension du rôle de l'information dans l'activité économique. Mais compte tenu de l'importance intrinsèque de la théorie des jeux dans les cursus universitaires, je lui réserve une partie à part entière.

La seconde partie de ces notes de cours est conçue comme une présentation détaillée des principales contributions de l'économie de l'information. Dans cette partie, je me base de ce fait essentiellement sur les articles à l'origine de ces apports.

Le volume horaire de ce cours ne me permet pas d'aborder tous les thèmes contenus dans ce document de travail. Mais dans un souci de cohérence globale, il était nécessaire d'inclure des développements non abordés avec les étudiants. En particulier, le chapitre 10 n'est pas souvent exposé en cours. Le chapitre 5 n'est pas traité en tant que tel mais est tout de même exposé en cours car il constitue un pré requis indispensable pour les modèles de signaux (chapitre 8).

Je remercie vivement tous les étudiants des différentes promotions ayant assisté à ce cours. Leurs questions et commentaires pertinents ainsi que leur intérêt pour les sujets abordés m'ont permis, d'année en année, d'améliorer le contenu de ce cours. Pour cela, ma gratitude envers eux est grande.

Abdelkader GLIZ

Alger, octobre 2010

Introduction

L'économie de l'information analyse les choix économiques en situation d'*asymétrie de l'information* et leurs implications sur la collectivité, les agents économiques et le fonctionnement des marchés. Le modèle standard de l'équilibre général est basé entre autres, sur l'hypothèse de l'information parfaite selon laquelle tous les agents économiques ont un accès identique, immédiat et sans coût à l'information. L'abandon de cette hypothèse et donc la prise en compte explicite de l'asymétrie de l'information dans l'analyse économique est l'objet de l'économie de l'information. Cette évolution a permis une meilleure compréhension d'un grand nombre de phénomènes économiques.

En mettant en évidence l'impact du phénomène de *sélection adverse* sur le fonctionnement du marché, G. Akerlof (1970) a montré que l'hypothèse de l'information parfaite n'est pas neutre dans l'analyse économique. De même, une des conclusions de la *théorie de l'agence* est que l'existence de l'*aléa moral* dans la relation principal/agent entraîne souvent une diminution du bien-être des parties contractantes par rapport à un état où n'existeraient pas ces imperfections en termes d'information.

L'économie de l'information analyse également la réaction des agents économiques en présence de l'asymétrie de l'information, notamment le *signal* et le *filtrage* (*screening*). Ces types de réactions permettent d'expliquer le rôle économique de certaines institutions et de mécanismes, telles que la garantie, la réputation, la réglementation, la marque, la gouvernance, … Dans le premier cas, afin de pouvoir se distinguer, la partie informée de type élevée est incitée à révéler sa qualité. La deuxième réaction provient de la partie non informée qui est incitée à mettre en place un *mécanisme de révélation* de l'information à travers notamment la proposition à la partie informée d'un menu de contrats.

Sur le plan normatif, les analyses et modèles développés ont pour objectif général de proposer des mécanismes économiques optimaux tenant compte du fait que les agents économiques détiennent de l'information privée. Ces mécanismes sont analysés comme étant des jeux à information incomplète. Cette démarche est utilisée par exemple, dans la théorie de la *taxation optimale* (Mirrless, 1971) et la détermination d'*enchères* optimales (Myerson, 1981).

Le développement de la théorie des jeux a eu un impact décisif sur l'étude des situations d'asymétrie de l'information. L'analyse de l'*interaction stratégique* permise par la théorie des jeux se trouve être bien adaptée à l'étude de l'échange entre individus ayant un accès différent à l'information. En particulier, les *jeux à information incomplète*, qu'ils soient statiques ou dynamiques, prennent en compte de façon explicite l'existence de l'asymétrie de l'information.

Première Partie : Théorie des jeux

L'activité économique et sociale se caractérise très souvent par des situations où le bien-être d'un agent économique dépend non seulement de ses propres actions mais également des décisions des autres agents. Conscient de l'existence de ce type d'interdépendance, chaque agent en tient compte et l'intègre dans la prise de décision.

La théorie des jeux est un cadre conceptuel d'analyse de la décision où cette interaction stratégique entre les décideurs est centrale pour la compréhension de l'issue finale. Un des exemples classiques pour la compréhension de l'interaction stratégique est le cas du duopole. En prenant sa décision de production ou de prix de vente, chacune des deux firmes d'un duopole doit tenir compte de la réaction de l'autre firme et doit de ce fait intégrer cette réaction dans sa propre décision.

Dans la théorie standard de l'équilibre général, l'interaction entre les agents est inexistante. En fait, deux cas extrêmes ont particulièrement focalisé l'attention. Le premier a porté sur la concurrence parfaite. Dans ce cas, le prix des biens est donné par le marché et l'entreprise (par exemple) prend sa décision de production en ne tenant compte que de ces prix de marché et de son coût marginal et ce, indépendamment de la décision des autres entreprises. Les décisions de consommation des individus sont de même considérées comme étant indépendantes l'une de l'autre. La deuxième situation particulièrement étudiée est celle du monopole. Dans une telle situation, il n'existe qu'une seule entreprise. De ce fait, par construction, le monopoleur prend sa décision de production de façon indépendante.

Mais la prise en compte de l'interaction entre agents devient incontournable dans certains phénomènes, tels que l'oligopole, les contrats, le marchandage, la régulation, les enchères, le financement de biens publics, … Notons d'ores et déjà que tout comme dans le cas de la théorie standard de l'économie, les agents économiques sont supposés être rationnels, c'est-à-dire que leur objectif est la maximisation de l'utilité (ou de l'espérance d'utilité).

La prise en compte explicite et formalisée de l'interaction stratégique entre agents économiques a débuté avec Cournot (1838) qui a analysé la situation de duopole en prenant explicitement en compte l'interaction entre les décisions de production des firmes du marché. Bertrand (1883) a analysé l'interaction dans un duopole où la décision des firmes porte sur le prix de vente à proposer, alors que dans le modèle de Cournot la décision des entreprises porte sur la quantité à produire. Les théoriciens considèrent cependant que le véritable point de départ de la théorie des jeux est la publication par Von Neumann et Morgenstern (1944) du livre : Theory of Games and Economic Behaviour. La contribution majeure de Nash (1950) est de montrer l'existence d'un équilibre (d'une solution) pour des jeux à somme non nulle. Harsanyi (1967-1968) et Selten (1965) ont étendu par la suite le concept d'équilibre de Nash respectivement aux jeux à information incomplète (jeux Bayesiens) et aux jeux dynamiques.

Les jeux étudiés sont des *jeux non coopératifs*. Dans cette catégorie de jeux, les seuls paiements possibles sont ceux représentés dans les matrices de paiement. Aucun autre paiement ne peut avoir lieu entre les deux joueurs et ces derniers ne sont censés se préoccuper que de la maximisation de leur utilité.

Chapitre 1 : Jeux simultanés à information complète, théorie

Nous étudions dans ce chapitre les jeux simultanés à information complète. En plus de l'hypothèse de rationalité, dans cette classe de jeux, on adopte l'hypothèse selon laquelle chaque joueur dispose de toute l'information se rapportant au jeu, à savoir le nombre de joueurs, l'ensemble des stratégies possibles de chaque joueur et les fonctions de paiement de chaque joueur. Les jeux de cette forme sont des jeux à information complète. Les joueurs sont censés prendre leur décision de façon simultanée. Nous obtenons ainsi des *jeux simultanés à information complète*. Cette classe de jeux est la plus simple possible et constitue le point de départ pour des situations de jeux plus complexes. Elle permet d'étudier le concept d'équilibre central de la théorie des jeux qui est l'équilibre de Nash.

1.1. La forme normale d'un jeu

On appelle un jeu sous forme normale (ou stratégique) un jeu ayant les caractéristiques suivantes :

- Il s'agit d'un *jeu à information complète*.

- Il s'agit d'un *jeu simultané* (*statique*) où chaque joueur choisit une stratégie *indépendamment* du choix de l'autre joueur et le jeu ne se *répète* pas.

- Les joueurs sont *rationnels* et leur objectif est la *maximisation* de leur paiement.[1]

Dans la forme normale d'un jeu, chaque joueur choisit une stratégie et le paiement qu'obtient chaque joueur dépend de la combinaison des stratégies choisies. Pour illustrer la forme normale, considérons le cas classique du dilemme du prisonnier. Il s'agit d'un jeu décrivant la situation de deux individus arrêtés et soupçonnés de crime et placés dans des cellules séparées sans possibilité de communication. N'ayant pas les preuves suffisantes pour leur inculpation, le juge, convaincu de leur culpabilité, tente d'obtenir des confessions des deux prisonniers et à chacun d'eux, il propose ce qui suit :

- Si un des prisonniers est le seul à avouer, alors sa peine sera allégée et égale à 1 an et l'autre prisonnier aura une peine de 8 ans.
- Si les deux prisonniers avouent, alors chacun d'eux aura une peine de 5 ans.
- Si personne n'avoue, une peine de 2 ans sera tout de même appliquée pour un délit plus faible (par exemple la détention illégale d'armes).

Ce jeu peut être représenté par la matrice des paiements suivante :

[1] Voir Fudenberg et Tirole (1991), *Game Theory*. The MIT press, Cambridge, Massachusetts. 1996. Page 4.

		Prisonnier 2	
		Ne pas avouer	Avouer
Prisonnier 1	Ne pas avouer	-2 , -2	-8 , -1
	Avouer	-1 , -8	-5 , -5

Figure 1.1

Nous pouvons maintenant donner une formulation plus générale de la forme normale d'un jeu. La forme normale d'un jeu spécifie 1) les joueurs concernés par le jeu ; 2) les stratégies disponibles pour chaque joueur et 3) le paiement reçu par chaque joueur pour chaque combinaison de stratégies pouvant être choisies par les joueurs. Un jeu sous forme normale *G* est donc la donnée de trois éléments :

- L'ensemble des *n* joueurs concernés. Un joueur quelconque est appelé *i* et donc $i = 1, 2, \ldots, n$;

- Les ensembles S_i des stratégies possibles de chacun des *n* joueurs. Une stratégie du joueur *i* est s_i avec $s_i \in S_i$. Les stratégies possibles s_i sont appelées *stratégies pures*. Nous définirons plus loin la notion de *stratégie mixte*. Une issue $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ est une combinaison possible de stratégies des *n* joueurs ;

- Le paiement (ou utilité) obtenu par le joueur *i* lorsque les *n* joueurs choisissent l'issue $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ est $u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. On considère explicitement que le résultat obtenu par l'agent *i* (utilité, profit, …) est fonction non seulement de sa propre stratégie mais également de l'ensemble des stratégies choisies par tous les autres joueurs. Cette forme de l'utilité est l'expression de l'interaction stratégique. A l'effet de différencier entre la stratégie du joueur *i* et celle des autres joueurs, u_i peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u_i = u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i})$$

avec :

$$s_{-i} = (s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_n)$$

s_{-i} désigne le sous-ensemble des stratégies choisies par les joueurs autres que le joueur *i*.

Nous utiliserons donc la formulation suivante pour représenter un jeu statique sous forme normale : $G = [n\,;\{S_i\}\,;\{u_i(\cdot)\}]$.

Remarquons que la forme normale est définie pour un jeu où les joueurs choisissent leur stratégie simultanément. Mais ceci ne signifie pas nécessairement que les joueurs agissent en même temps. En fait, pour obtenir la forme normale (jeu simultané), il suffit que chaque joueur choisisse sa stratégie en ignorant le choix des autres joueurs. Par exemple, dans le

modèle du dilemme du prisonnier, comme les prisonniers n'ont pas la possibilité de communiquer entre eux, il n'est pas obligatoire qu'ils prennent leur décision simultanément.

1.2. L'équilibre en stratégies dominantes

On étudie ici un type de jeu sous forme normale où l'équilibre est aisément prévisible. Le concept d'équilibre développé pour cela est celui de l'équilibre en stratégies dominantes. La solution d'un jeu est obtenue en se basant sur l'idée qu'un joueur *rationnel* ne choisit jamais une stratégie strictement dominée. Commençons par définir la notion de stratégie strictement dominée.[2]

Définition : Une stratégie $s_i \in S_i$ est une stratégie strictement dominée pour le joueur *i* dans le jeu $G = [n\,;\{S_i\}\,;\{u_i(\cdot)\}]$ si pour tout $s_i' \neq s_i$ on a $u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s_i', s_{-i})$ pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$.

A titre illustratif, considérons la forme normale (stratégique) du jeu représentée par la matrice des paiements suivante :

Joueur 2

Joueur 1		B_1	B_2	B_3
	A_1	10 , 10	4 , 9	4 , 11
	A_2	5 , 6	8 , 3	3 , 4
	A_3	4 , 0	8 , 1	5 , 3

Figure 1.2

Cette matrice des paiements indique pour chacun des deux joueurs ($n = 2$), l'ensemble des stratégies possibles et qui sont $S_1 = \{A_1, A_2, A_3\}$ et $S_2 = \{B_1, B_2, B_3\}$. Au niveau de chaque cellule de la matrice, le nombre de gauche représente l'utilité du joueur 1 et le nombre de droite l'utilité du joueur 2. Il s'agit maintenant de déterminer quel pourrait être l'équilibre prévisible de ce jeu, c'est à dire le choix simultané de stratégies par les deux joueurs, sachant que chaque joueur agit de façon rationnelle (maximise son utilité) et prend en considération le choix de l'autre joueur.

Dans le jeu de la figure 1.2, cet équilibre est aisément prévisible. L'équilibre peut ici être obtenu par *élimination successive des stratégies strictement dominées*. On remarque en effet, que la stratégie B_3 procure au joueur 2 un plus grand paiement que la stratégie B_2 et ce, quelle que soit la stratégie choisie par le joueur 1. On dit dans ce cas que la stratégie B_2 est *strictement dominée* par la stratégie B_3. Un joueur rationnel ne choisira jamais de jouer la stratégie B_2. La stratégie B_2 peut donc être éliminée et le jeu devient comme suit :

[2] Gibbons, R. (1992). *A Primer in Game Theory*. Harvester Wheatsheaf, 1992. Page 4

Joueur 2

		B_1	B_3
Joueur 1	A_1	10 , 10	4 , 11
	A_2	5 , 6	3 , 4
	A_3	4 , 0	5 , 3

Figure 1.3

Notons que c'est le joueur 2 qui a éliminé la stratégie B_2. Mais comme le joueur 1 sait que le joueur 2 est rationnel, il sait que le joueur 2 a éliminé la stratégie B_2. De plus, le joueur 2 sait que le joueur 1 sait qu'il a éliminé la stratégie B_2, … Cette structure d'information, appelée *connaissance commune*, permet de passer de la forme normale représentée dans la figure 1.2 à la forme normale représentée dans la figure 1.3 et cela *pour les deux joueurs*.

Le même type de raisonnement montre qu'à partir de la matrice des paiements réduite de la figure 1.3, le joueur 1 ne peut choisir la stratégie A_2 car celle-ci est strictement dominée par la stratégie A_1. Après élimination de la stratégie strictement dominée A_2, le jeu se simplifie encore comme suit :

Joueur 2

		B_1	B_3
Joueur 1	A_1	10 , 10	4 , 11
	A_3	4 , 0	5 , 3

Figure 1.4

Ici également, l'élimination de la stratégie strictement dominée A_2 est une information commune aux deux joueurs. L'examen de la matrice des paiements de la figure 1.4 montre que pour le joueur 2, la stratégie B_1 est strictement dominée par la stratégie B_3. Sachant que la stratégie B_1 est éliminée par le joueur 2, la meilleure réponse du joueur 1 est de choisir la stratégie A_3. Ainsi, l'issue finale du jeu est (A_3, B_3) et les joueurs 1 et 2 reçoivent un paiement (utilité) égal respectivement à 5 et 3.

L'issue (A_3, B_3) est appelée *équilibre en stratégies strictement dominantes*. L'utilisation de la notion d'équilibre est ici motivée par le fait qu'aucun joueur n'est incité à dévier *de façon unilatérale* vers une autre stratégie.[3] Si par exemple le joueur 1 décidait de façon unilatérale de jouer la stratégie A_1 ou la stratégie A_2, il obtiendrait un paiement de 4 ou de 3, inférieurs au paiement de 5.

On remarque que l'issue (l'équilibre) du jeu procure un paiement total de 8 qui est bien inférieur au gain total procuré par l'issue (A_1, B_1) par exemple, soit 20. En d'autres termes,

[3] Gibbons, R. (1992). *A Primer in Game Theory*. Harvester Wheatsheaf, 1992. Page 4.

l'équilibre du jeu de la figure 1.2 n'est pas nécessairement un équilibre de Pareto.[4] L'une des raisons est qu'il s'agit d'un jeu non coopératif, c'est-à-dire d'un jeu sans autre possibilité de paiement entre les joueurs. Les seuls paiements du jeu sont ceux indiqués dans la matrice des paiements.

Le modèle du dilemme du prisonnier est un exemple classique où la solution du jeu s'obtient par élimination successive des stratégies strictement dominées. Dans ce modèle, l'issue (avouer, avouer) est un équilibre en stratégies strictement dominantes et chaque prisonnier se voit infliger une peine de 5 ans de prison. En agrégeant les paiements, on remarque que c'est la solution la plus mauvaise collectivement. Ainsi, par dilemme du prisonnier, on entend une situation de jeu où l'équilibre du jeu est un équilibre en stratégies dominantes et où le gain total ne correspond pas à un optimum de Pareto.

Le modèle du dilemme du prisonnier a plusieurs applications, comme par exemple le problème du *free rider*. Nous présentons ci-dessous une version du modèle du dilemme du prisonnier dans le domaine social, la version traitant du problème du risque moral. Nous considérons la situation de 2 individus $i = 1, 2$ faisant partie de la même équipe.[5] Le résultat final obtenu par l'équipe dépend de la contribution de chaque joueur *i* qui peut soit travailler ($s_i = 1$) soit tricher ($s_i = 0$). Le produit total du groupe est égal à $4(s_1 + s_2)$ et est partagé de façon égale entre les 2 joueurs. Chaque membre du groupe supporte un coût de 3 lorsqu'il fournit l'effort de travailler et de 0 lorsqu'il triche. La matrice des paiements de ce jeu se présente ainsi :

		Joueur 2	
		Travailler	Tricher
Joueur 1	Travailler	1 , 1	-1 , 2
	Tricher	2 , -1	0 , 0

Figure 1.5

Pour chacun des deux joueurs, la stratégie "travailler" est strictement dominée par la stratégie "tricher". Cet exemple illustre bien la problématique qui ressort du modèle du dilemme du prisonnier. En effet, le profil de stratégie (travailler, travailler) domine, au sens de Pareto, le profil de stratégies (tricher, tricher). Mais, il ne constitue pas l'équilibre du jeu.

Cet exemple fait ressortir le coût social qui pourrait apparaître lorsque la rémunération est faiblement reliée à l'effort. Relevons que cet équilibre peut se modifier si par exemple, le coût de l'effort était moindre. Ceci pourrait expliquer que dans les sociétés vénérant ou glorifiant l'effort, l'équilibre soit (travailler, travailler).[6]

[4] Rappelons qu'un état de l'économie représente un équilibre de Pareto s'il n'est pas possible d'améliorer le bien-être d'un agent économique sans détériorer celui d'au moins un autre agent économique.
[5] Exemple emprunté à Mas-Colell, Whinston & Green (1995). Page 235.
[6] Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre le même exemple en posant que le coût de l'effort est de 1. Dans ce cas, (Travailler, Travailler) est un équilibre en stratégies strictement dominantes.

1.3. L'équilibre de Nash en stratégies pures

Les jeux admettant un équilibre en stratégies strictement dominantes ne constituent pas le cas général. C'est le cas par exemple du jeu sous forme normale suivant pour lequel on peut vérifier qu'il n'existe pas d'équilibre en stratégies strictement dominantes :

Joueur 2

Joueur 1		B_1	B_2	B_3
	A_1	6 , 7	9 , 6	0 , 6
	A_2	5 , 2	8 , 2	4 , 5
	A_3	7 , 7	7 , 8	0 , 9

Figure 1.6

Pour caractériser l'issue de ce jeu, un nouveau concept d'équilibre a été proposé en 1950 par J.F. Nash, défini comme suit :[7]

Définition : L'issue en stratégies pures $s^* = \left(s_1^*, \ldots, s_n^*\right)$ est un équilibre de Nash si pour tout joueur *i* et pour toute stratégie $s_i \in S_i$, nous avons :

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

En d'autres termes, l'équilibre de Nash est une issue où simultanément le joueur *i* choisit la meilleure stratégie compte tenu du meilleur choix du joueur *j* et le joueur *j* choisit la meilleure stratégie compte tenu du meilleur choix du joueur *i*. La différence entre l'équilibre en stratégies dominantes et l'équilibre de Nash est donc la suivante : dans l'équilibre en stratégies dominantes, le choix du joueur *i* est optimal pour tout choix du joueur *j*, alors que dans l'équilibre de Nash, le choix de *i* est optimal pour (seulement) tout choix optimal de *j*. Comme pour l'équilibre en stratégies dominantes, l'équilibre de Nash est stable car c'est une issue où aucun joueur n'est incité à dévier *de façon unilatérale*.

Pour trouver l'équilibre de Nash, il faut déterminer pour chacun des deux joueurs sa (ses) meilleure(s) réponse(s) à chaque stratégie de l'autre joueur. Ainsi, pour le joueur 1, on a :

- L'action A_3 est sa meilleure réponse si le joueur 2 choisit B_1 ;
- L'action A_1 est sa meilleure réponse si le joueur 2 choisit B_2 ;
- L'action A_2 est sa meilleure réponse si le joueur 2 choisit B_3.

En utilisant le concept de fonction de meilleure réponse $b_i(\cdot)$, on a pour le joueur 1, $A_3 = b_1(B_1)$, $A_1 = b_1(B_2)$ et $A_2 = b_1(B_3)$.

[7] Nash, J. F. (1950). Equilibrium points in *n*-person games. *Proceedings of the National Academy of sciences* 36: 48-49.

Pour le joueur 2, on :

- L'action B_1 est sa meilleure réponse si le joueur 1 choisit A_1 ;
- L'action B_3 est sa meilleure réponse si le joueur 1 choisit A_2 ;
- L'action B_3 est sa meilleure réponse si le joueur 1 choisit A_3.

En utilisant le concept de fonction de meilleure réponse $b_i(\cdot)$, on a pour le joueur 2, $B_1 = b_2(A_1)$, $B_3 = b_2(A_2)$ et $B_3 = b_2(A_3)$.

Les fonctions de meilleure réponse montrent qu'on $A_2 = b_1(B_3)$ et $B_3 = b_2(A_2)$. Ainsi, le jeu de la figure 1.6 admet un équilibre de Nash et est l'issue (A_2, B_3). Cette issue est un équilibre de Nash car, de façon simultanée :

- La stratégie A_2 est la meilleure réponse du joueur 1 si le joueur 2 choisit la stratégie B_3 ;
- La stratégie B_3 est la meilleure réponse du joueur 2 si le joueur 1 choisit la stratégie A_2.

L'équilibre de Nash est un concept important dans l'analyse économique des interactions stratégiques entre agents économiques. Ce concept d'équilibre appelle cependant un certain nombre de remarques, notamment concernant :[8]

- La possibilité d'inexistence d'un équilibre de Nash en stratégies pures (mais non en stratégies mixtes).
- La possibilité d'existence de plusieurs équilibres de Nash.

Remarques : On peut montrer que :[9]

- Dans un jeu sous forme normale, si le processus d'élimination itérative des stratégies strictement dominées élimine toutes les stratégies, sauf l'issue $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$, alors cette issue est l'unique équilibre de Nash ;
- Dans un jeu sous forme normale, si l'issue $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ est un équilibre de Nash, alors cette issue survivra au processus d'élimination des stratégies strictement dominées.

Parmi les motivations proposées pour justifier la définition de l'équilibre de Nash, supposons qu'avant de jouer, les joueurs tentent de et arrivent à harmoniser leur stratégie. Ainsi, chacun des joueurs s'engage à réaliser une action donnée. Cela peut être par exemple la clarification de l'apport de chaque actionnaire à la création en commun d'une entreprise. Tous les paiements issus de cette activité commune sont décrits dans la matrice des paiements. En particulier, si l'un des joueurs venait à ne pas respecter son engagement, aucune pénalité supplémentaire n'existe. Pour que cet engagement soit crédible, il est nécessaire qu'aucun des joueurs ne puisse, en changeant unilatéralement de stratégie, augmenter son niveau d'utilité. Dans ces conditions, il est possible de *prédire* la solution du jeu. Une telle prédiction est dite stratégiquement stable ou auto-imposée (Self enforcing agreement) et est précisément un équilibre de Nash.

---

[8] Ces points seront abordés ultérieurement.
[9] Voir par exemple Gibbons R (1992). Page 12.

On peut également motiver l'équilibre de Nash en se servant de l'idée de *convention sociale stable*. Si une convention doit être définie ou émerger dans une communauté ou société, le comportement des membres de cette société doit constituer un équilibre de Nash. Autrement, au moins un des membres de la communauté sera incité à dévier de la convention, ce qui remet en cause la stabilité de cette convention. Le processus d'émergence d'une telle convention stable n'est pas aisé à décrire. Mais si une telle convention sociale stable devait exister, elle doit être un équilibre de Nash.

1.4. L'équilibre de Nash en stratégies mixtes

1.4.1. La notion de stratégie mixte

Certains jeux peuvent n'admettre aucun équilibre de Nash en stratégies pures. Le jeu intitulé « Apparier les sous » en est un exemple célèbre.[10] Ce jeu consiste pour les deux joueurs à annoncer simultanément Pile (*P*) ou Face (*F*). Si les deux joueurs font une annonce identique (resp. différente), le joueur 1 obtient une utilité de 1 (resp. –1) et le joueur 2 une utilité de –1 (resp. 1). La matrice des paiements de ce jeu se présente donc comme suit :

Joueur 2

		Pile (*P*)	Face (*F*)
Joueur 1	Pile (*P*)	1 ; -1	-1 ; 1
	Face (*F*)	-1 ; 1	1 ; -1

Figure 1.7

Ce jeu, qui est un *jeu à somme nulle*, n'admet aucun équilibre de Nash en stratégies pures. En effet, pour des annonces identiques, le joueur 2 est incité à dévier. De même, si les deux annonces sont différentes, c'est le joueur 1 qui est incité à dévier.

Une caractéristique de ce type de jeu est que d'une part chaque joueur va tenter de deviner la stratégie adoptée par l'autre joueur et d'autre part, de bluffer afin de perturber l'autre joueur. En raison de l'incertitude concernant la stratégie de chaque joueur, l'équilibre (en stratégie pure) ne peut être déterminé. Le tir au but (penalty) dans un match de football est une situation similaire à celle du jeu « Apparier les sous ». En effet, les spécialistes de cette discipline sportive soutiennent que le gardien de but et le tireur choisissent chacun, indépendamment l'un de l'autre, une direction pour plonger pour le premier et pour tirer pour le second. La situation favorable (sans pour autant que l'issue ne soit certaine) au gardien de but est celle où les deux joueurs choisissent la même direction. Par contre, la situation favorable pour le tireur au but est celle où les deux directions sont opposées.[11]

Dans une telle situation, chaque joueur adopte une stratégie mixte, c'est-à-dire une stratégie consistant à affecter une probabilité pour chacune des stratégies s_i de S_i. Dans l'exemple de « Apparier les sous », une stratégie mixte est la distribution de probabilité (σ_1, σ_2) avec

[10] Jeu connu sous le nom de Matching Pennies.
[11] On montre que la stratégie mixte peut être interprétée comme *l'incertitude* d'un joueur sur le choix de l'autre joueur (J. Harsanyi (1995)).

$0 \leq \sigma_i \leq 1$ où σ_1 est la probabilité de choisir pile et σ_2 la probabilité de choisir face par le joueur *i*.

Comme il ressortira plus bas, le jeu « Apparier les sous » admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes. Le théorème de Nash montre que dans un jeu où les ensembles de stratégies sont finis, il existe toujours un équilibre en stratégies mixtes.

Définition : Soit S_i l'ensemble fini des stratégies pures du joueur *i*. Une stratégie mixte du joueur *i* est une distribution de probabilité $\sigma_i : S_i \to [0,1]$ assignant à chaque stratégie pure $s_i \in S_i$ une probabilité d'être choisie $\sigma_i(s_i)$ avec $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$.

Supposons que le joueur *i* possède *K* stratégies pures, c'est-à-dire $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \cdots, s_{iK}\}$. On notera par $\Delta(S_i)$, l'ensemble des stratégies mixtes possibles du joueur *i*. On a donc :

$$\Delta(S_i) = \left\{ (\sigma_{i1}, \cdots, \sigma_{iK}) \in R^K \,/\, \sum_k \sigma_{ik} = 1 \text{ et } 0 \leq \sigma_{ik} \leq 1 \text{ pour } k = 1, \cdots, K \right\}$$

Par exemple pour $K = 3$, l'ensemble des stratégies mixtes $\Delta(S_i)$ est représenté par les points d'un triangle équilatéral de hauteur 1, comme le montre la figure 1.8 :[12]

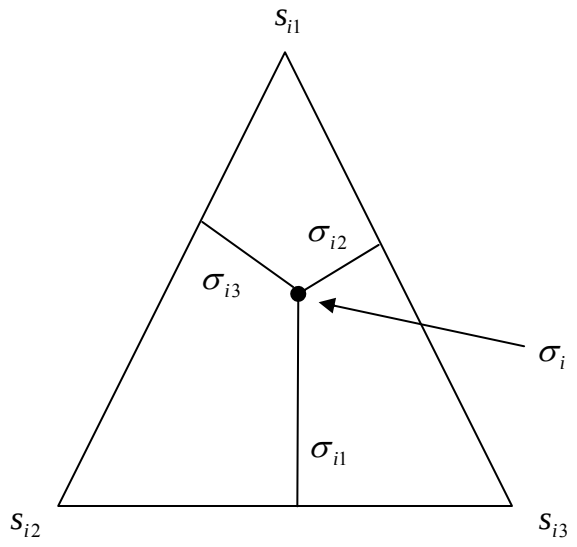


Figure 1.8

[12] Rappelons que dans un triangle équilatéral, la somme des perpendiculaires de n'importe quel point intérieur ou frontière vers les côtés opposés est égale à la hauteur du triangle. Pour un nombre de stratégies *K* = 3, si on choisit un triangle équilatéral avec une hauteur égale à 1, on peut représenter une stratégie mixte par un point à l'intérieur de ce triangle, puisque dans ce cas on a $\sum_k \sigma_{ik} = 1$.

Remarque : Une stratégie pure est un cas particulier de stratégie mixte. Soit $S_i = (s_{i1}, \cdots, s_{iK})$ l'ensemble des stratégies pures du joueur *i*. La stratégie pure s_{i1} est alors la stratégie mixte $(1,0,\ldots,0)$, …, la stratégie pure s_{iK} est la stratégie mixte $(0,0,\ldots,1)$.

Lorsqu'on introduit les stratégies mixtes, le calcul du paiement prend la forme de l'espérance de paiement. Pour illustrer ce mode de calcul, considérons par exemple le jeu suivant :

		Joueur 2		
		L	*M*	*R*
Joueur 1	*U*	4 , 3	5 , 1	6 , 2
	M	2 , 1	8 , 4	3 , 6
	D	3 , 0	9 , 6	2 , 5

Figure 1.9

Le paiement des joueurs 1 et 2 pour, par exemple, les profils de stratégies $\sigma_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $\sigma_2 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sont :

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{3}\left(0 \times 4 + \frac{1}{2} \times 5 + \frac{1}{2} \times 6\right) + \frac{1}{3}\left(0 \times 2 + \frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{2} \times 3\right) + \frac{1}{3}\left(0 \times 3 + \frac{1}{2} \times 9 + \frac{1}{2} \times 2\right) = \frac{11}{2}$$

$$u_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 6\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 6 + \frac{1}{3} \times 5\right) = \frac{24}{6} = 4.$$

On peut également pour un joueur quelconque, déterminer le paiement procuré par une stratégie pure donnée, étant donné que l'autre joueur adopte une stratégie mixte donnée. Par exemple, si le joueur 1 choisit la stratégie mixte $\sigma_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, l'utilité pour le joueur 2 en retenant la stratégie *M* est :

$$u_2(M, \sigma_1) = \left(1 \times \frac{1}{3}\right) + \left(4 \times \frac{1}{3}\right) + \left(6 \times \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

Pour donner une expression plus formelle de l'espérance de paiement lorsque les joueurs adoptent des stratégies mixtes, considérons le jeu sous forme normale décrit dans la matrice des paiements suivante :

Joueur 2

		$\sigma_2(s_{21})$	...	$\sigma_2(s_2)$	...	$\sigma_2(s_{2K})$
		s_{21}	...	s_2	...	s_{2K}
$\sigma_1(s_{11})$	s_{11}	(s_{11}, s_{21})				
$\vdots$	$\vdots$					
$\sigma_1(s_1)$	s_1			$s = (s_1, s_2)$		
$\vdots$	$\vdots$					
$\sigma_1(s_{1J})$	s_{1J}					

Joueur 1

Figure 1. 10

Dans un jeu sous forme normale, c'est-à-dire un jeu où le choix des stratégies s'effectue de façon simultané, le choix d'une stratégie mixte par un joueur se fait indépendamment du choix des autres joueurs. En conséquence, la probabilité $\sigma(s)$ d'une issue quelconque $s = (s_1, \cdots s_n)$, est le produit de probabilités suivant :

$$\sigma(s) = \sigma(s_1, \cdots, s_n) = \sigma_1(s_1) \times \cdots \times \sigma_n(s_n) = \prod_i \sigma_i(s_i)$$

Le niveau d'utilité du joueur 1 associé à une issue en stratégies mixtes $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ est une espérance d'utilité et est donc déterminé comme suit :

$$\begin{aligned} u_1(\sigma) = u_1(\sigma_1, \sigma_2) = {} & \sigma_1(s_{11})[\sigma_2(s_{21})u_1(s_{11}, s_{21}) + \cdots + \sigma_2(s_{2k})u_1(s_{11}, s_{2K})] \\ & + \cdots \\ & + \sigma_1(s_{1J})[\sigma_2(s_{21})u_1(s_{1J}, s_{21}) + \cdots + \sigma_2(s_{2k})u_1(s_{1J}, s_{2K})] \end{aligned}$$

$$u_1(\sigma) = \sigma_1(s_{11}) \sum_{s_2 \in S_2} \sigma_2(s_2) u_1(s_{11}, s_2) + \cdots + \sigma_1(s_{1J}) \sum_{s_2 \in S_2} \sigma_2(s_2) u_1(s_{1J}, s_2)$$

$$u_1(\sigma) = \sigma_1(s_{11}) u_1(s_{11}, \sigma_2) + \cdots + \sigma_1(s_{1J}) u_1(s_{1J}, \sigma_2)$$

$$u_1(\sigma) = \sum_{s_1 \in S_1} \sigma_1(s_1) u_1(s_1, \sigma_2)$$

D'une façon générale, en remplaçant le joueur 1 par le joueur *i* et le joueur 2 par le joueur –*i*, on obtient, sachant que $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$:

$$u_i(\sigma) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) u_i(s_i, \sigma_{-i})$$

Les fonctions u_i sont continues car elles sont polynomiales. De même, elles sont linéaires par rapport à $\sigma_i(s_i)$. L'utilité $u_i(\sigma)$ peut s'écrire autrement. En effet,

$$u_1(\sigma) = \sigma_1(s_{11})\sigma_2(s_{21})u_1(s_{11}, s_{21}) + \cdots + \sigma_1(s_{1J})\sigma_2(s_{2k})u_1(s_{1J}, s_{2K}) = \sum_{s \in S} \sigma(s)u_1(s)$$

Ce qui donne d'une façon générale, en remplaçant 1 par *i* :

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \sigma(s)u_i(s)$$

Avec $S = S_1 \times \cdots \times S_n$.

Remarque : La relation de dominance étudiée dans le cas des stratégies pures peut être étendue au cas des stratégies mixtes. Ainsi, la stratégie pure s_i est strictement dominée pour le joueur *i* s'il existe une stratégie mixte σ_i telle que :

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \text{ pour tout } s_{-i} \in S_{-i}$$

Cette remarque signifie qu'une stratégie non strictement dominée en stratégies pures peut le devenir lorsqu'on introduit la possibilité de stratégie mixte. Pour montrer cela, considérons l'exemple suivant qui ne fait ressortir que les paiements du joueur 1:

		Joueur 2	
		L	*R*
Joueur 1	*U*	2 ,	-1 ,
	M	0 ,	0 ,
	D	-1 ,	2 ,

Figure 1.11

La stratégie *M* du joueur 1 n'est dominée ni par la stratégie pure *U* ni par la stratégie pure *D*. Mais, si le joueur 1 affecte la probabilité ½ à *U* et ½ à *D*, alors il obtient de cette stratégie mixte une utilité espérée égal à :

- $2\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ si le joueur 2 joue *L* ;
- $(-1)\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ si le joueur 2 joue *R*.

Donc, quelque soit la stratégie du joueur 2, la stratégie *M* procurera au joueur 1 une utilité moindre. Pour le joueur 1, la stratégie pure *M* est donc strictement dominée par la stratégie mixte $\sigma = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1.4.2. Détermination de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes

L'extension de l'espace des stratégies à l'effet d'inclure les stratégies mixtes entraîne l'extension de la définition de l'équilibre de Nash qui devient :

Définition : L'issue en stratégies mixtes $\sigma^* = (\sigma_1^*, \cdots, \sigma_n^*)$ est un équilibre de Nash si pour tout joueur $i = 1, \cdots, n$ et pour toute stratégie mixte $\sigma_i \in \Delta(S_i)$, on a :

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

Pour montrer comment obtenir un équilibre de Nash en stratégies mixtes, considérons le jeu « Apparier les sous » (qui, rappelons-le, n'a pas d'équilibre en stratégies pures) et soit maintenant $(r, 1-r)$ la stratégie mixte du joueur 1 avec *r* représentant la probabilité que le joueur 1 joue Pile et $1-r$ la probabilité que le joueur 1 joue Face et soit $(q, 1-q)$ la stratégie mixte du joueur 2 avec *q* représentant la probabilité que le joueur 2 joue Pile et $1-q$ la probabilité que le joueur 2 joue Face.

Joueur 2

		σ_2	q	$1-q$
	σ_1		Pile (P)	Face (F)
Joueur 1	r	Pile (P)	1 ; -1	-1 ; 1
	$1-r$	Face (F)	-1 ; 1	1 ; -1

Figure 1.12

L'équilibre de Nash est obtenu lorsque pour chacun des joueurs, la stratégie choisie est une meilleure réponse aux meilleurs choix des autres joueurs. Pour cela, la recherche de l'équilibre de Nash commence par la détermination de la fonction (ou correspondance) de meilleure réponse de chaque joueur.[13]

Commençons par déterminer la correspondance $r(q)$ du joueur 1 pour que sa stratégie mixte $\sigma_1 = (r, 1-r)$ soit la meilleure réponse à la stratégie mixte $\sigma_2 = (q, 1-q)$ du joueur 2.[14] Le paiement espéré du joueur 1 en adoptant la stratégie mixte $(r, 1-r)$ étant donné que le joueur 2 adopte la stratégie mixte $(q, 1-q)$ est :

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = rq(+1) + r(1-q)(-1) + (1-r)q(-1) + (1-r)(1-q)(+1) = (1-2q) + r(4q-2)$$

On remarque que le paiement espéré du joueur 1 étant donné que le joueur 2 joue la stratégie mixte $(q, 1-q)$ est croissant par rapport à *r* si $(4q-2) > 0$ et décroissant par rapport à *r* si $(4q-2) < 0$. En d'autres termes, si $q > \frac{1}{2}$, le paiement espéré du joueur 1 est à son maximum lorsque la probabilité *r* prend sa valeur maximale. Dans ce cas, nous avons donc $r = 1$, c'est-à-dire que le joueur 1 choisit Pile. De même si $q < \frac{1}{2}$, nous avons $r = 0$, c'est-à-dire que le

[13] La relation $y = f(x)$ est une fonction lorsque à chaque valeur de *x* est associée au plus une valeur de *y*. Elle est appelée *correspondance* lorsque à chaque valeur de *x* peuvent être associées plusieurs valeurs de *y*.

[14] Dans ce modèle, pour désigner $r(q)$ et $q(r)$, nous parlons de *correspondance* de meilleure réponse, car à une valeur de *q* ou de *r* peut correspondre plusieurs valeurs $r(q)$ ou de $q(r)$. Nous verrons plus loin que dans le cas du modèle de Cournot, nous parlerons de *fonction* de meilleure réponse.

joueur 1 choisit Face. Lorsque $q = \frac{1}{2}$, le paiement espéré du joueur 1 est indépendant de la valeur de *r*. Le joueur 1 est donc indifférent entre Pile et Face. Dans ce cas, la stratégie mixte $(r, 1-r)$ est la meilleure réponse à la stratégie mixte $(q, 1-q)$ pour toutes les valeurs de *r* comprises entre 0 et 1 incluses. Notons que pour $q = \frac{1}{2}$, $r(q)$ prend plus d'une valeur. On dira dans ce cas que $r(q)$ est une correspondance de meilleure réponse. La correspondance de meilleure réponse $r(q)$ du joueur 1 est donc de la forme suivante :

$$r(q) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad q > \frac{1}{2} \\ [0,1] & \text{si} \quad q = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad q < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sa représentation graphique est donnée à la figure 1.13.

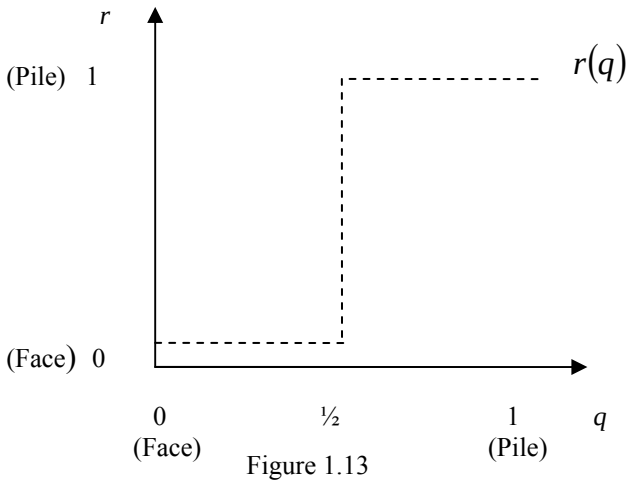


Figure 1.13

Après avoir obtenu $r(q)$, la correspondance de meilleure réponse du joueur 1, il faut déterminer $q(r)$, la correspondance de meilleure réponse du joueur 2. La correspondance $q(r)$ est déterminée de telle sorte que la stratégie mixte $(q, 1-q)$ du joueur 2 soit sa meilleure réponse à la stratégie mixte $(r, 1-r)$ du joueur 1. Le paiement espéré du joueur 2 en adoptant la stratégie mixte $(q, 1-q)$ étant donné que le joueur 1 adopte la stratégie mixte $(r, 1-r)$ est :

$$u_2(\sigma_1, \sigma_2) = qr(-1) + q(1-r)(+1) + (1-q)r(+1) + (1-q)(1-r)(-1) = (2r-1) + q(2-4r)$$

En utilisant la même démarche que celle utilisée pour le joueur 1, on obtient la correspondance de meilleure réponse $q(r)$ du joueur 2.

$$q(r)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad r<\dfrac{1}{2}\\ [0,1] & \text{si} \quad r=\dfrac{1}{2}\\ 0 & \text{si} \quad r>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

La figure 1.14 donne la représentation graphique de la correspondance de meilleure réponse $q(r)$. La figure 1.15 est obtenue après avoir appliqué une rotation à la figure 1.14.

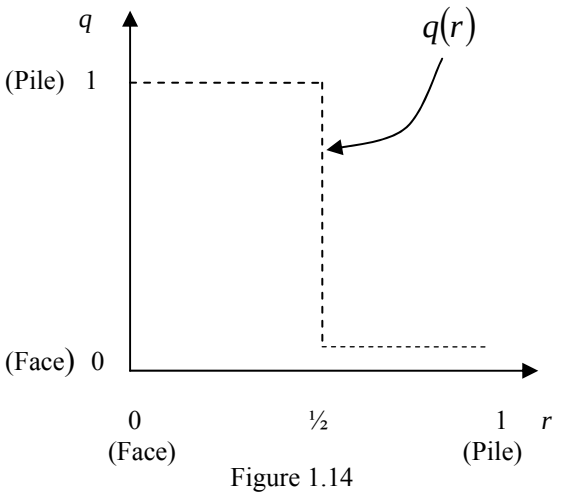


Figure 1.14

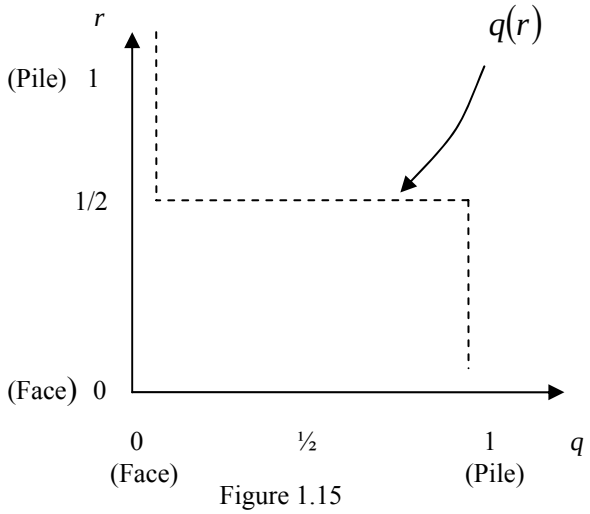


Figure 1.15

En combinant les figures 1.13 et 1.15, on obtient la figure suivante:

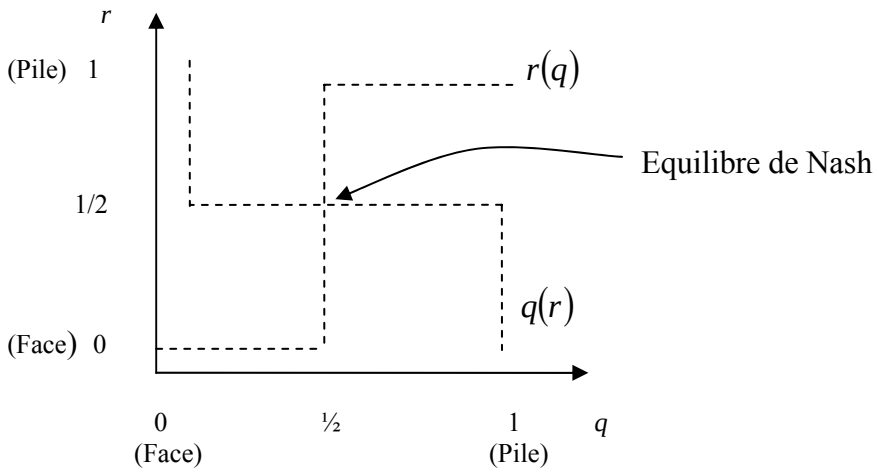


Figure 1.16

L'équilibre de Nash est obtenu lorsqu'on a simultanément $r^* = r(q^*)$ et $q^* = q(r^*)$. Il est donc représenté par le point d'intersection des courbes $r(q)$ et $q(r)$ de la figure 1.16.

La détermination de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes devient plus aisée si on note qu'à cet équilibre, chaque joueur est indifférent entre ses différentes stratégies pures étant donnée la stratégie mixte des autres joueurs. En d'autres termes, à l'équilibre de Nash en stratégies mixtes, les stratégies pures entrant avec une probabilité non nulle dans la stratégie mixte de chacun des joueurs procurent la même espérance de paiement étant donnée la stratégie mixte des autres joueurs.

Pour comprendre cette propriété de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes, reprenons le jeu « Apparier les sous » et supposons que le joueur 1 affecte une probabilité faible (disons 1%) que le joueur 2 joue Pile. Dans ce cas, le joueur 1 obtient une espérance de paiement égale à $0{,}01 \times 1 + 0{,}99 \times -1 = -0{,}98$ en jouant Pile et une espérance de paiement égale à $0{,}01 \times -1 + 0{,}99 \times 1 = 0{,}98$ en jouant Face. Dans ce cas, pour $q = 1\%$, aucune stratégie mixte ne peut exister pour le joueur 1 car ce dernier peut toujours augmenter strictement son espérance de paiement en jouant la stratégie pure Face. Le même raisonnement s'applique si le joueur 1 affecte une probabilité élevée (disons 99%) que le joueur 2 joue Pile.

Dans le jeu « Apparier les sous », pour qu'une stratégie mixte puisse exister pour le joueur 1, il faut que la stratégie mixte du joueur 2 soit telle que le joueur 1 soit indifférent entre jouer Pile ou jouer Face. Ainsi, pour trouver l'équilibre de Nash en stratégies mixtes du jeu, on doit avoir pour chaque joueur l'égalité des paiements espérés des stratégies pures entrant avec probabilité strictement positive dans sa stratégie mixte étant donnée la stratégie mixte des autres joueurs. Pour le joueur 1, cette propriété implique que :

$$u_1(\text{Pile}, \sigma_2) = u_1(\text{Face}, \sigma_2)$$

$$q(+1) + (1-q)(-1) = q(-1) + (1-q)(+1)$$

Ceci donne $q = \frac{1}{2}$. La même démarche appliquée au joueur 2 donne $r = \frac{1}{2}$. L'équilibre de Nash en stratégies mixtes du jeu est donc $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ avec $\sigma_1 = (r, 1-r) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $\sigma_2 = (q, 1-q) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. L'expression rigoureuse de cette propriété est donnée par la proposition suivante :

Propriété : Soit $S_i^+ \subseteq S_i$ l'ensemble des stratégies pures que le joueur *i* joue avec une probabilité strictement positive dans le profil de stratégies mixtes $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$. Le profil de stratégies mixtes σ est un équilibre de Nash si et seulement si :

i) $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i', \sigma_{-i})$ pour tout $s_i, s_i' \in S_i^+$ et pour tout joueur *i* ;

ii) $u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i', \sigma_{-i})$ pour tout $s_i \in S_i^+$ et pour tout $s_i' \notin S_i^+$ et pour tout joueur *i*.

En d'autres termes, le profil de stratégies mixte σ est un équilibre de Nash sous les deux conditions nécessaires et suffisantes suivantes : i) chacun des joueurs est indifférent entre les stratégies pures jouées avec probabilité strictement positive étant données la stratégie mixte des autres joueurs ; ii) pour aucun joueur, les stratégies pures non incluses dans la stratégie mixte ne doivent procurer une espérance de paiement supérieure à l'espérance de paiement

des stratégies pures incluses dans la stratégie mixte étant données la stratégie mixte des autres joueurs.[15]

Corollaire : Si pour le joueur 1, une stratégie pure s_1 est strictement dominée par une stratégie mixte σ_1, alors cette stratégie pure n'est jamais choisie dans un équilibre de Nash en stratégies mixtes. En d'autres termes, si $u_1(s_1,\sigma_2) < u_1(\sigma_1,\sigma_2)$ pour tout σ_2, alors $\sigma_1(s_1) = 0$ dans l'équilibre de Nash (σ_1^*, σ_2^*). Sinon, le joueur peut toujours augmenter son utilité en changeant une stratégie strictement dominée par l'une des stratégies la dominant. Ce changement, lorsqu'il est possible, est une déviation profitable pour le joueur, ce qui contredit la définition de l'équilibre de Nash. Ceci implique qu'un équilibre de Nash en stratégies mixtes doit assigner une probabilité strictement positive aux stratégies non strictement dominées.

Ce corollaire généralise le résultat concernant l'élimination des stratégies strictement dominées. En effet, de par cette propriété, on définit une stratégie pure dominée non seulement par rapport aux autres stratégies pures, mais également par rapport aux stratégies mixtes.

1.5. L'équilibre de Nash avec « mains tremblantes »

Soit un jeu sous forme normale $G = [n, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ ayant le profil de stratégies $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*) = (s_1^*, s_{-i}^*)$ comme équilibre de Nash.[16] L'idée à la base de l'équilibre de Nash en mains tremblantes est qu'on considère qu'il existe toujours la possibilité ayant une très petite et strictement positive probabilité $\varepsilon_i(s_i)$, que le joueur *i* commette l'erreur de retenir une stratégie s_i différente de la stratégie optimale s_i^*. La question est alors de savoir si, étant donnée cette possibilité d'erreur pour tout joueur *i* et pour tout $s_i \in S_i$, la meilleure réponse des autres joueurs est toujours s_{-i}^*. Il s'agit en d'autres termes, de savoir si l'équilibre de Nash s^* est *robuste* à la possibilité d'erreur $\varepsilon_i(s_i)$ pour tout *i* et pour tout $s_i \in S_i$. Cette problématique a donné lieu au concept de l'équilibre de Nash en mains tremblantes.[17]

Il s'agit d'un raffinement de l'équilibre de Nash introduit par Selten (1975) pour tenir compte de la possibilité toujours présente d'erreur de la part des joueurs.[18] Ce critère de perfection permet ainsi d'écarter certains équilibres de Nash non « désirables », comme par exemple les équilibres de Nash dans lesquels les joueurs jouent des stratégies faiblement dominées. Un équilibre de Nash est donc considéré comme une prédiction raisonnable s'il demeure un équilibre de Nash même en présence de la possibilité (très petite) d'erreur de la part des joueurs.

---

[15] Voir démonstration dans Mas-Colell, Whinston and Green (1995), page 250.
[16] Cette démarche peut être étendue à l'équilibre en stratégies mixtes.
[17] Selten, R (1975). Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*. Volume 4. Pages 25-35
[18] En réalité, Selten a introduit ce critère pour la perfection des jeux dynamiques.

Pour montrer comment le critère de la main tremblante permet d'écarter les équilibres de Nash dans lesquels les joueurs jouent des stratégies faiblement dominées, considérons le jeu sous forme normale représenté par la matrice des paiements suivante :

Joueur 2

Joueur 1		L	R
	U	$\underline{2}$, $\underline{2}$	1 , - 3
	D	-3 , 1	$\underline{1}$, $\underline{1}$

Figure 1.17

Ce jeu admet deux équilibres de Nash : (U,L) et (D,R). On remarque cependant que l'équilibre de Nash (D,R) consiste pour chaque joueur à choisir une action faiblement dominée.[19] Bien que le concept de l'équilibre de Nash n'élimine pas les stratégies faiblement dominées, le choix d'une telle stratégie n'est cependant pas toujours désirable. En effet, comme le montre le jeu ci-dessus, pour choisir la stratégie *D*, le joueur 1 doit être certain que le joueur 2 choisira l'action *R*. Le même raisonnement s'applique au joueur 2. Or, comme dans ce jeu il existe deux équilibres de Nash, le choix de *R* par le joueur 2 n'est pas certain. Le joueur 1 ne devrait par conséquent pas choisir l'action *D*. Il en est de même du joueur 2 pour l'action *R*. En d'autres termes, le concept de l'équilibre de Nash n'est pas suffisant pour écarter un profil de stratégies consistant pour les joueurs à choisir une action faiblement dominée.

Pour écarter ce type d'équilibre, on peut se référer au raffinement de l'équilibre de Nash proposé par Selten (1975). Ce raffinement vise à ne sélectionner que l'équilibre de Nash qui soit robuste à la possibilité que les joueurs commettent une erreur avec une très faible probabilité. Un équilibre de Nash satisfaisant ce test de robustesse est appelé équilibre de Nash avec « mains tremblantes ».

Pour montrer comment ce raffinement permet d'éliminer l'équilibre (D,R), considérons la possibilité que le joueur 2, au moment de choisir l'action *R*, commette une erreur et retient l'action *L*. Cette possibilité a une probabilité de $\frac{1}{n}$ qui peut devenir aussi petite que l'on souhaite, simplement en donnant à *n* une valeur suffisamment grande.

Dans ce cas, en jouant *D*, le joueur 1 obtient une espérance de paiement égale à $-3\frac{1}{n}+1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{4}{n}$ et en jouant *U*, il obtient une espérance de paiement égale à $2\times\frac{1}{n}+1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{n}$. Comme $1+\frac{1}{n}>1-\frac{4}{n}$, l'introduction de la possibilité d'erreur implique que *D* n'est plus une meilleure réponse du joueur 1 au choix de *R* par le joueur 2. Le même raisonnement implique que *R* n'est plus une meilleure réponse du joueur 2 au choix de

[19] Relevons également que l'équilibre de Nash (U,L) domine l'équilibre de Nash (D,R) au sens de Pareto.

D par le joueur 1. En conséquence, l'équilibre de Nash (D,R) n'est pas un équilibre de Nash avec « mains tremblantes ».

De la même manière, on peut vérifier que l'équilibre de Nash (U,L) satisfait ce test de robustesse et constitue donc un équilibre de Nash avec « mains tremblantes ». Pour cela, on doit montrer que simultanément :

- *U* est la meilleure réponse du joueur 1 à la stratégie complètement mixte $\left(1-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ du joueur 2 où $\frac{1}{n}$ est la probabilité d'erreur que le joueur 2 choisisse *R*.
- *L* est la meilleure réponse du joueur 2 à la stratégie complètement mixte $\left(1-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ du joueur 1 où $\frac{1}{n}$ est la probabilité d'erreur que le joueur 1 choisisse *D*.

Si le joueur 2 joue la stratégie totalement mixte $\left(1-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, le joueur 1 obtient un paiement de $2\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}$ s'il choisit *U* et de $-3\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}=-3+4\frac{1}{n}$ s'il choisit *D*.

Pour n suffisamment grand, la meilleure réponse du joueur 1 est bien *U* car $u_1\left(U,\sigma_2^n\right)>u_1\left(D,\sigma_2^n\right)$ avec σ_2^n représentant la stratégie totalement mixte du joueur 2 indicée sur *n*. La même démarche montre que $u_2\left(\sigma_1^n,L\right)>u_2\left(\sigma_1^n,R\right)$. On conclue donc que l'équilibre de Nash (U,L) est un équilibre de Nash avec « mains tremblantes ».[20]

1.6. L'existence de l'équilibre de Nash

Bien que historiquement l'existence de l'équilibre de Nash ait été établie par Nash en 1950, on peut également la considérer comme un corollaire au théorème d'existence de Debreu, Glicksberg, Fan (1952). Ce dernier établit des conditions suffisantes pour qu'existe un équilibre de Nash en stratégies pures.[21]

Théorème (Debreu (1952), Glicksberg (1952), Fan (1952)): *Un équilibre de Nash existe dans le jeu sous forme normale* $G=[n\,;\{S_i\}\,;\{u_i(\cdot)\}]$ *si pour tout* $i=1,\ldots,n$,

i) S_i *est un sous-ensemble non vide convexe et compact de l'espace Euclidien* R^m *;*

ii) $u_i(s_1,\ldots,s_n)$ *est continue en* $(s_1,\ldots,s_n)$ *et quasi-concave en* s_i.[22]

---

[20] Dans cet exemple, la probabilité d'erreur est une séquence qui converge vers 0 car $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

[21] Pour la démonstration, voir par exemple Mas-Colell, Whinston and Green (1995), page 260.

[22] Un sous-ensemble *X* de R^m est dit *compact* s'il est fermé et borné. Un ensemble est dit *fermé* s'il contient sa frontière. Un ensemble est dit *borné* s'il peut être contenu en totalité à l'intérieur d'un cercle (ou d'une sphère) de rayon approprié suffisamment grand. Une fonction $f(\cdot)$ est *quasi-concave* si et seulement si

La démonstration de ce théorème se base sur le théorème du point fixe de Kakutani qui est lui-même une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer. En **premier lieu**, on montre qu'un point fixe de la correspondance de meilleure réponse $b(s_1,...,s_n)=b_1(s_{-1})\times...\times b_n(s_{-n})$ est un équilibre de Nash. En **second lieu**, on montre que la correspondance de meilleure réponse doit avoir un point fixe.

Un point fixe est un point $x \in X$ tel que $f(x)=x$. Dans le cas où $X=[a,b]\subset R$, l'existence d'un point fixe est représentée par la figure suivante :

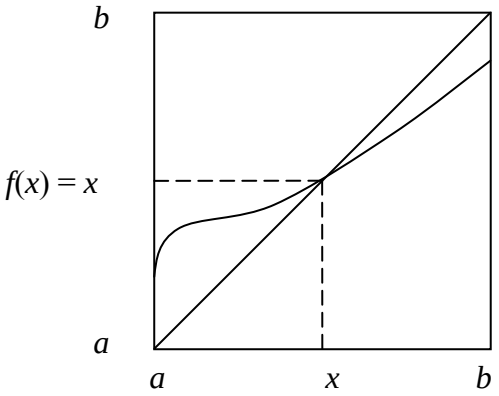
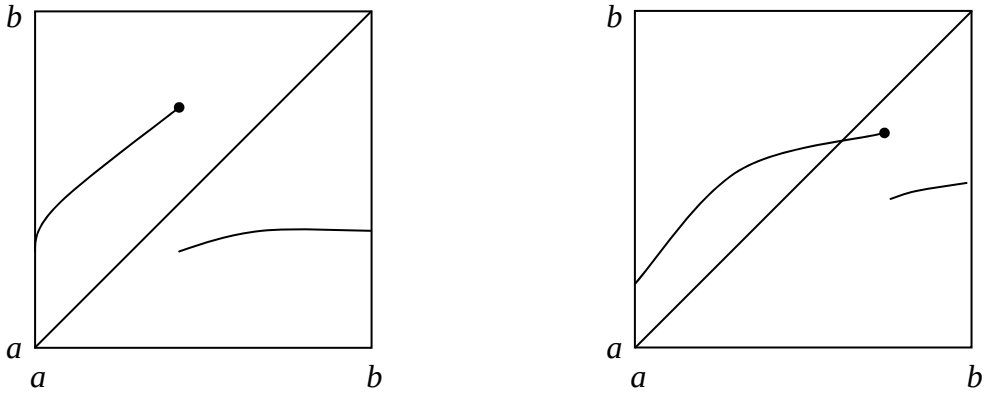


Figure 1.17

L'hypothèse de continuité de la fonction $f(\cdot)$ est essentielle pour *garantir* l'existence d'un point fixe. La continuité empêche le graphe de la fonction *f* de "sauter par-dessus" la diagonale qui est le lieu géométrique des points satisfaisant l'égalité $f(x)=x$. Comme le montre la figure suivante, en cas de non continuité, la fonction $f:S\to S$ peut ne pas avoir un point fixe.



Fonction *f* non continue sur $[a,b]$ sans point fixe

(a)

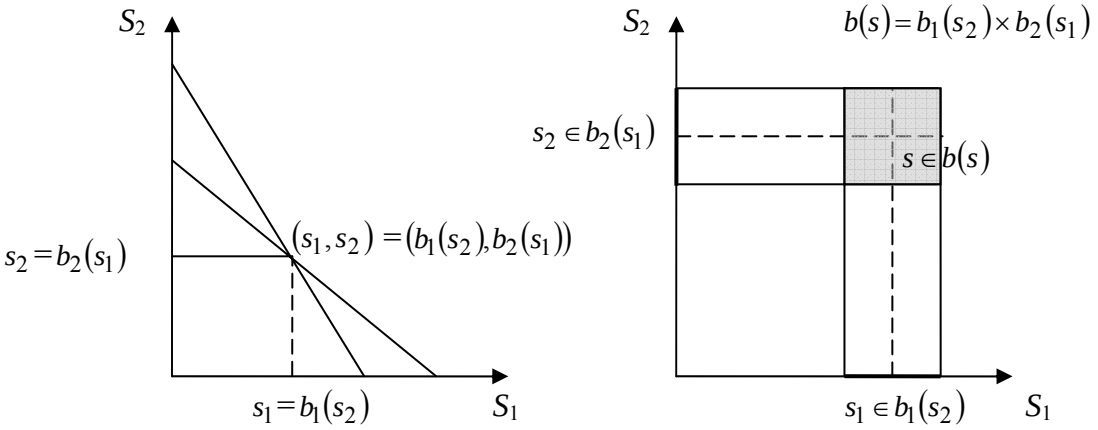
Figure 1.18

Fonction *f* non continue sur $[a,b]$ avec point fixe

(b)

$f(\alpha\, x+(1-\alpha)x') \geq$ Min $\{f(x),\ f(x')\}$. On remarque qu'une fonction concave est nécessairement quasi-concave, mais l'inverse n'est pas (toujours) vrai.

La figure 1.19.a montre, pour le cas de deux joueurs, qu'un équilibre de Nash est un point fixe puisque, par exemple dans le cas d'une fonction de meilleure réponse, on a, par construction, $(s_1^*, s_2^*) = (b(s_1^*), b(s_2^*))$. Dans le cas d'une correspondance de meilleures réponses (figure 1.19.b) , on a $s^* \in b(s^*)$.



(a) Figure 1.19 (b)

Le théorème de Debreu, Glicksberg et Fan (1952)) est démontré sur la base du théorème de Kakutani. Ce théorème permet à son tour de démontrer le théorème de Nash (1959).

Théorème de Nash (1950) : *Soit* $G = [n\,;\{S_i\}\,;\{u_i(\cdot)\}]$ *un jeu sous forme normale. Si n est fini et si les ensembles* $S_1, \ldots,$ S_n *sont des ensembles finis, alors ce jeu admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

Chapitre 2 : Jeux simultanés à information complète, applications

Depuis son apparition, le concept de l'équilibre de Nash a donné lieu à d'innombrables applications tant en économie que dans les autres domaines des sciences sociales. Nous présentons ci-dessous quelques-unes de ces applications afin de mettre en évidence l'apport fondamental de ce concept dans la compréhension des phénomènes économiques. Notons que les modèles de Cournot et de Bertrand sont apparus avant le concept de l'équilibre de Nash.[23]

2.1. L'enchère au second prix

L'enchère au second prix, appelée également enchère de Vickrey, est un exemple célèbre de jeu dont l'issue est un équilibre en stratégies (non strictement) dominantes. Dans l'enchère au second prix, les offres (enchères) sont soumises sous pli cacheté et l'objet est attribué à l'enchérisseur qui propose l'offre la plus élevée. Le prix à payer est égal à la deuxième offre la plus élevée. Vickrey (1961) a montré que l'enchère au second prix implique que la stratégie dominante des acheteurs est l'annonce de leur vraie évaluation subjective.[24] L'enchère au second prix est de ce fait un mécanisme direct *révélateur*.

Pour montrer cela, considérons l'acheteur potentiel *i* ayant une évaluation subjective v_i pour l'objet qui est donc sa disposition à payer et annonçant une enchère b_i. Appelons r_i le maximum des enchères annoncées par les acheteurs potentiels autres que *i*, c'est à dire :

$$r_i = \underset{j \neq i}{Max}\ b_j$$

Pour l'enchérisseur *i*, la question posée est de savoir où positionner son enchère b_i par rapport à sa disposition à payer v_i. Pour montrer que la stratégie consistant à enchérir sa propre disposition à payer, c'est-à-dire $b_i = v_i$, est une stratégie (non strictement) dominante, considérons les deux autres stratégies d'enchères possibles, soit $b_i > v_i$ et $b_i < v_i$. Relevons que ces deux dernières stratégies sont des déviations par rapport à la stratégie $b_i = v_i$.

La première stratégie possible, $b_i > v_i$, correspond au cas où l'acheteur surenchérit par rapport à son évaluation subjective de l'objet. On peut envisager trois sous cas. Si $r_i > b_i$, l'objet n'est pas attribué à l'acheteur *i* qui obtient une utilité égale à 0. Si $r_i < v_i$, l'acheteur obtient l'objet et une utilité positive égale à $v_i - r_i$. Dans ces deux sous cas, l'acheteur *i* aurait obtenu la même utilité avec la stratégie d'enchère $b_i = v_i$. Si $v_i \leq r_i \leq b_i$, l'acheteur *i* obtient

[23] Voir cependant la brève description historique de Osborne (2002) qui fait ressortir les différences existant entre la formulation originelle de ces deux modèles et le concept de l'équilibre de Nash.
[24] Vichrey. W (1961). Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders. *The Journal of Finance*. Vol. 16, March 1961. P 8-37.

l'objet et une utilité négative ou nulle égale à $v_i - r_i$.[25] En cas d'égalité, soit $b_i = r_i$, le gagnant est choisi par tirage aléatoire et le gain espéré est égale à $(v_i - r_i)/2$. L'acheteur peut toutefois éviter cette perte en adoptant la stratégie d'enchère $b_i = v_i$. Ainsi, la stratégie d'enchère $b_i = v_i$ domine (non strictement) la stratégie d'enchère $b_i > v_i$.

La deuxième stratégie possible, $b_i < v_i$, correspond au cas où l'acheteur *i* sous-enchérit par rapport à son évaluation subjective de l'objet. La même démarche adoptée au premier cas montre que dans les deux sous cas où $r_i \geq v_i$ et $r_i \leq b_i$, l'acheteur *i* obtient la même utilité en adoptant la stratégie d'enchère $b_i = v_i$. Mais si $b_i < r_i < v_i$, l'acheteur *i* ne prend pas l'objet et obtient une utilité égale à 0. Mais dans ce troisième sous cas, l'acheteur *i* peut gagner l'enchère et obtenir une utilité positive s'il avait soumis une enchère $b_i = v_i$. Ainsi, la stratégie $b_i = v_i$ domine (non strictement) la stratégie d'enchère $b_i < v_i$.

2.2. Le modèle de duopole (concurrence imparfaite) de Cournot

Pour illustrer le concept de l'équilibre de Nash dans la théorie du marché, considérons le modèle de duopole de Cournot. Le duopole est «un marché qui est servi par deux producteurs et sur lequel les demandes proviennent de nombreux agents qui sont individuellement petits. La théorie économique représente cette situation sous l'hypothèse que le même prix s'appliquera aux échanges de toutes les unités du bien considéré et que la demande est concurrentielle dans le sens suivant : la quantité totale vendue dépend du prix du bien et de rien d'autre ».[26]

Dans le cadre de ce modèle, les deux firmes 1 et 2 choisissent simultanément leur quantité $q_1 \in Q_1 \subset R^+$ et $q_2 \in Q_2 \subset R^+$. L'offre totale du marché est donc $Q = q_1 + q_2$. Le prix de marché *p* est une fonction décroissante de la quantité totale offerte, soit $p = p(Q) = p(q_1 + q_2)$ avec $p'(Q) < 0$. La fonction $p(Q)$ est appelée fonction de demande inverse. Chaque firme supporte un coût de production c_i en fonction de la quantité produite, soit $c_i = c_i(q_i)$. Le profit de la firme *i* = 1, 2 est donc :

$$\pi_i(q_i, q_{-i}) = q_i \cdot p - c_i = q_i \cdot p(q_1 + q_2) - c_i(q_i)$$

Cette fonction de profit fait bien ressortir l'interaction stratégique entre les deux firmes. Chaque firme sait que son profit dépend de son niveau de production mais également du niveau de production de l'autre firme car ce dernier a une influence sur le prix de marché.

L'équilibre de Cournot suppose que chacune des deux firmes maximise son profit étant donné que l'autre firme également prend une décision de production dans l'objectif de maximiser son profit. L'équilibre de Cournot (q_1^*, q_2^*) représente l'équilibre de Nash de ce duopole.[27] Cette approche est formalisée dans la notion de fonction de réaction de Cournot. La fonction de

[25] En toute rigueur, ce troisième cas est $v_i < r_i \leq b_i$ ou $v_i \leq r_i < b_i$.
[26] E. Malinvaud (1982). P 155.
[27] Certains auteurs l'appellent équilibre de Cournot-Nash.

réaction de Cournot est la fonction $r_i : Q_j \to Q_i$ qui indique la quantité optimale q_i^* choisie par la firme *i* pour toute quantité q_j choisie par la firme *j*. La fonction de réaction $r_i(q_j)$ avec $i \neq j$ est également appelée fonction de meilleure réponse de la firme *i* aux décisions de la firme *j*. Pour la firme 1, la fonction de réaction est $q_1^* = r_1(q_2)$ et est le résultat du programme suivant :

$$\underset{q_1}{Max}\ \pi_1(q_1, q_2) = q_1 . p(q_1 + q_2) - c_1(q_1)$$

Si la fonction π_i est différentiable et concave, la condition du premier ordre implique que q_1^* est déterminé par l'équation suivante :

$$\frac{d}{dq_1}\pi_1(q_1, q_2) = p(q_1^* + q_2) + q_1^* \cdot \frac{d}{dq_1} p(q_1^* + q_2) - \frac{d}{dq_1} c_1(q_1^*) = 0$$

De façon similaire, la quantité q_2^* de la firme 2 satisfait l'équation suivante :

$$\frac{d}{dq_2}\pi_2(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2^*) + q_2^* \cdot \frac{d}{dq_2} p(q_1 + q_2^*) - \frac{d}{dq_2} c_2(q_2^*) = 0$$

L'équilibre de Cournot ou plus généralement l'équilibre de Nash (q_1^*, q_2^*) est obtenu lorsque simultanément, on a $q_1^* = r_1(q_2^*)$ et $q_2^* = r_2(q_1^*)$. Ainsi les deux équations caractérisant l'équilibre de Nash sont :

$$p(q_1^* + q_2^*) + q_1^* \cdot \frac{d}{dq_1} p(q_1^* + q_2^*) - \frac{d}{dq_1} c_1(q_1^*) = 0$$

et

$$p(q_1^* + q_2^*) + q_2^* \cdot \frac{d}{dq_2} p(q_2^* + q_2^*) - \frac{d}{dq_2} c_2(q_2^*) = 0$$

Dans l'une des versions les plus simples de ce modèle, on considère que la fonction de demande inverse et la fonction de coût sont linéaires, soit :[28]

$$p(q_1 + q_2) = a - b \cdot (q_1 + q_2) \text{ avec } b > 0$$

$$c_i(q_i) = c \cdot q_i \quad \text{avec} 0 \leq c \leq a$$

Dans cette version, le coût marginal est constant. On fait ici l'hypothèse que les coûts fixes sont nuls. Les équations donnant les conditions du premier ordre des deux firmes s'écrivent dans ce cas :

$$a - 2b \cdot r_1(q_2) - b \cdot q_2 - c = 0$$

[28] D. Fudenberg et J. Tirole (1996), p 14

$$a - 2b \cdot r_2(q_1) - b \cdot q_1 - c = 0$$

Les fonctions de meilleure réaction de Cournot des firmes 1 et 2 prennent alors la forme :

$$q_1^* = r_1(q_2) = \frac{a - bq_2 - c}{2b}$$

$$q_2^* = r_2(q_1) = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$$

Les équations caractérisant l'équilibre de Cournot (équilibre de Nash) impliquent que :

$$q_1^* = r_1(q_2^*) = \frac{a - bq_2^* - c}{2b}$$

$$q_2^* = r_2(q_1^*) = \frac{a - bq_1^* - c}{2b}$$

L'équilibre de Nash (de Cournot) obtenu après résolution de ces deux équations est :

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3b}$$

La recherche de l'équilibre de Cournot peut se faire à l'aide d'une résolution graphique en représentant dans des coordonnées cartésiennes (q_1, q_2) la fonction de meilleure réponse de la firme 1 en fonction de la quantité q_2, soit $r_1(q_2) = \frac{(a - bq_2 - c)}{2b}$ et la fonction de meilleure réponse de la firme 2 en fonction de la quantité q_1, soit $r_2(q_1) = \frac{(a - bq_1 - c)}{2b}$.

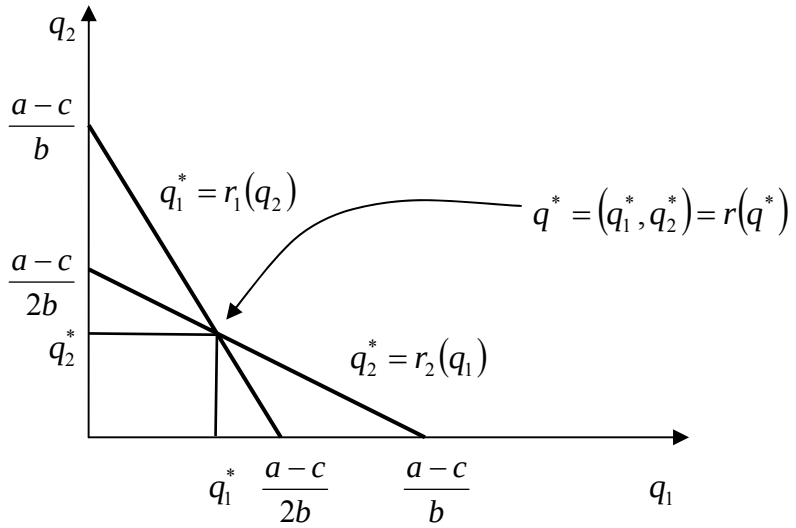


Figure 2.1

L'intersection des droites représentatives des deux fonctions de meilleures réponses représente l'équilibre de Nash. A cet équilibre, la quantité totale offerte est $\frac{2(a-c)}{3b}$ et le prix de marché est :

$$p(q_1+q_2)=a-b\frac{2(a-c)}{3b}=a-\frac{2}{3}(a-c)=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}c$$

Comme $a>c$, alors $p(q_1+q_2)=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}c>\frac{1}{3}c+\frac{2}{3}c=c$. En d'autres termes, l'équilibre de Cournot est tel que le prix de marché est plus grand que le coût marginal. Il n'est donc pas Pareto optimal.

A partir de la figure 2.1, on remarque que le point $q^*=(q_1^*,q_2^*)$ est également le point représentant le couple des images $(r_1(q_2^*), r_2(q_1^*))$. Si on définit $(r_1(q_2^*), r_2(q_1^*))$ par $r(q^*)$, alors l'équilibre de Nash peut être défini par la relation $q^*=r(q^*)$. En d'autres termes, l'équilibre de Nash est un point fixe pour la fonction $r(\cdot)$.

2.3. Le modèle de duopole de Bertrand

Le modèle de Bertrand (1838), comme le modèle de Cournot, traite de l'équilibre d'un marché en situation de duopole.[29] Le modèle peut être étendu au cas de *n* firmes. Dans le modèle de Bertrand, la variable de décision des firmes est le prix de vente et non la quantité à produire et en ce sens, on dit que ce modèle traite des décisions à court terme des firmes. Dans ce modèle, il existe deux firmes $i=1,2$ produisant un bien partiellement substituables.[30] Le coût unitaire de production, supposé constant et identique pour les deux firmes, est égal à *c*.

Chaque firme *i* choisit un prix de vente p_i et les quantités demandées adressées aux deux firmes 1 et 2 sont respectivement $q_1(p_1,p_2)=a-bp_1+dp_2$ et $q_2(p_1,p_2)=a-bp_2+dp_1$ avec $b>d>0$. Cette fonction de demande exprime l'idée selon laquelle la quantité demandée à une firme est négativement influencée par l'augmentation du prix proposé par cette firme et positivement influencée par l'augmentation du prix proposé par l'autre firme. De plus, le premier effet marginal est supérieur au second effet marginal.

La forme des fonctions de demande $q_1(p_1,p_2)$ et $q_2(p_1,p_2)$ fait bien ressortir l'interaction stratégique existant entre les deux firmes puisque la quantité demandée à la firme 1 par exemple est influencée simultanément par le prix qu'elle propose et par le prix proposée par la firme 2. Toutes ces données sont connaissance commune et les firmes prennent leur décision de prix de façon simultanée. Le concept d'équilibre approprié à ce modèle est donc bien

[29] Voir par exemple Gibbons (1992). Page 21.
[30] Dans le cas de biens partiellement substituables, le prix n'est pas l'unique facteur de la décision d'achat du consommateur. Il pourrait s'agir par exemple de téléphones cellulaires de marques différentes et ayant des caractéristiques proches.

l'équilibre de Nash.[31] L'objectif de chaque firme est la maximisation de son profit. Pour la firme 1, on a donc :

$$\underset{p_1}{Max}\ \pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)(a - bp_1 + dp_2)$$

La condition du premier ordre est $\frac{d}{dp_1}\pi_1(p_1, p_2) = a - 2bp_1 + dp_2 + bc = 0$.[32] Ceci permet d'obtenir la fonction de meilleure réponse $p_1^*(p_2)$ de la firme 1 : $p_1^*(p_2) = \frac{a + dp_2 + bc}{2b}$. La même démarche appliquée à la firme 2 permet d'obtenir la fonction de meilleure réponse $p_2^*(p_1)$ de la firme 2 : $p_2^*(p_1) = \frac{a + dp_1 + bc}{2b}$. L'équilibre de Bertrand est le vecteur de stratégies (p_1^*, p_2^*), solution des deux équations suivantes :

$$p_1^*(p_2^*) = \frac{a + dp_2^* + bc}{2b}$$
$$p_2^*(p_1^*) = \frac{a + dp_1^* + bc}{2b}$$

La résolution de ces équations montre que l'équilibre de Bertrand est le couple de stratégies $(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{a + bc}{2b - d}, \frac{a + bc}{2b - d}\right)$. Le schéma ci-dessous est la représentation graphique de l'équilibre de Bertrand - Nash.

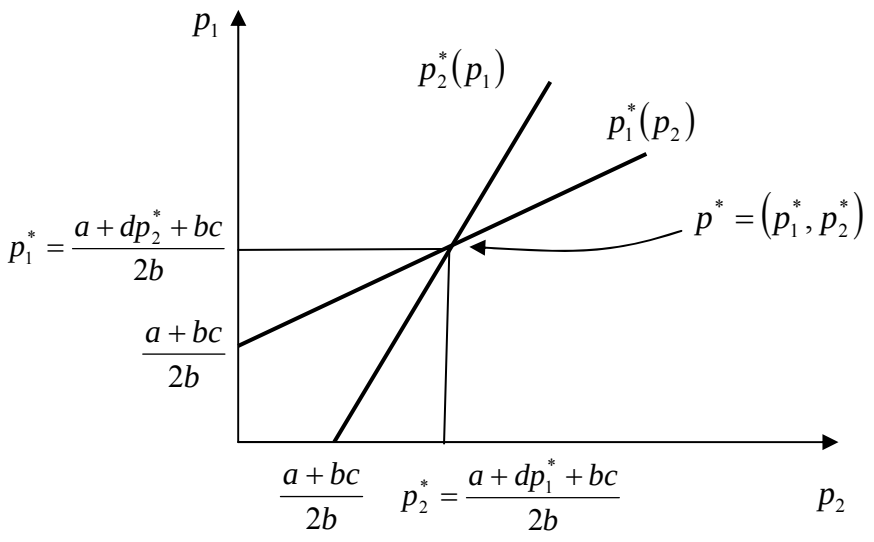


Figure 2.2

[31] Certains auteurs parlent d'équilibre de Bertrand-Nash.
[32] Il s'agit bien d'une condition nécessaire et suffisante car la fonction de profit $\pi_1(p_1, p_2)$ est concave en p_1.

Dans le cas de biens homogènes, le modèle de Bertrand débouche sur un résultat appelé *paradoxe de Bertrand*.[33] Les biens produits par les deux firmes étant non différentiables, les consommateurs dirigeront leur demande vers la firme ayant fixé le prix le plus faible. Si les deux firmes fixent le même prix, alors elles se partageront le marché à égalité. La quantité demandée à la firme *i* a donc pour expression :

$$q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} Q(p_i) & \text{si } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}Q(p_i) & \text{si } p_i = p_j \\ 0 & \text{si } p_i > p_j \end{cases}$$

Avec $Q(p_i)$ représentant la quantité demandée totale du marché au prix p_i. Dans ce jeu, l'équilibre de Bertrand est tel que les deux firmes fixent un prix égal au coût marginal, c'est-à-dire que $p_1^* = p_2^* = c$. Pour faire ressortir ce résultat, montrons tout d'abord qu'à l'équilibre, les deux firmes proposent le même prix. Supposons le contraire, soit $p_1^* > p_2^* > c$.[34] Dans ce cas, la quantité demandée à la firme 1 est égale à 0 et son profit est également nul. La firme 1 a de ce fait intérêt à dévier vers un prix égal à $p_2^* - \varepsilon > c$ où ε est un scalaire positif petit. La situation où $p_1^* > p_2^* > c$ ne peut donc être un équilibre. Ce dernier doit donc être tel que les deux firmes proposent le même prix.

Supposons maintenant que ce prix est supérieur au coût marginal, soit $p_1^* = p_2^* > c$. Dans ce cas, chacune des deux firmes reçoit une demande égale à $\frac{1}{2}Q(p_i)$ avec $i = 1$ ou 2 et réalise un profit positif. Pour un ε suffisamment petit, la firme 1 peut augmenter son profit en proposant un prix égal à $p_1^* - \varepsilon > c$ lui permettant d'obtenir toute la quantité du marché.

Ainsi, la seule situation où cette déviation n'augmente pas le profit est celle où $p_1^* = p_2^* = c$ qui constitue donc l'équilibre de duopole de Bertrand. Le paradoxe de ce résultat réside dans le fait que le prix d'équilibre en situation de duopole est identique au prix d'équilibre obtenu dans le cas de concurrence pure et parfaite.[35]

2.4. Le problème des commons

La question étudiée ici porte sur l'utilisation privée d'une ressource commune.[36] On montre dans ce cadre que la décentralisation des décisions, lorsque celles-ci sont basées sur des incitations privées, conduit à une surexploitation des ressources communes.[37] En se basant sur l'exemple de la pêche, Levhari et Mirman (1980) ont démontré que l'équilibre non coopératif (équilibre de Nash) résultant de l'interaction des pays pêcheurs entraîne une consommation présente élevée par rapport au stock de poisson. Ils ont également montré qu'un équilibre

[33] Dans le cas de biens homogènes, le seul critère du choix de la firme par l'acheteur est le prix.

[34] Le même résultat aurait été obtenu si on avait supposé $p_2^* > p_1^* > c$.

[35] Voir J. Tirole (1988) pour une discussion de ce paradoxe et des possibles alternatives pour sa résolution.

[36] Ce modèle a été utilisé par A. Gliz (2004) dans le thème de la privatisation.

[37] Cette question est connue comme étant le problème des commons. A ce propos, voir par exemple Gibbons (1992), page 27 et Levhari et Mirman (1980).

coopératif entre les pays pêcheurs permet d'éviter l'extinction future du stock de poisson. L'explication de cette conclusion est que dans l'équilibre non coopératif, chaque agent prend une décision *individuellement* optimale sans tenir compte du coût qu'il induit sur les autres agents. Par contre, dans l'option centralisée, la consommation du bien commun est plus faible car l'autorité centrale *internalise l'effet externe négatif* induit par la contrainte de la ressource commune.

Pour faire ressortir ce résultat, considérons le cas de l'utilisation par des fermiers d'une prairie pour le pâturage de leurs vaches. La prairie est un bien commun aux fermiers considérés. Soit *n* le nombre de fermiers. Chaque fermier *i* peut posséder un nombre de vaches égal à b_i. Le nombre total de vaches est $B = \sum_i b_i$. Le coût d'achat et d'entretien d'une vache est c, supposé le même pour toutes les vaches et pour tous les fermiers. Le bénéfice brut (ou revenu brut) procuré par le pâturage de chaque vache est $v(B)$ avec $v'(B) < 0$ et $v''(B) < 0$. La représentation graphique de la fonction $v(B)$ est la suivante :

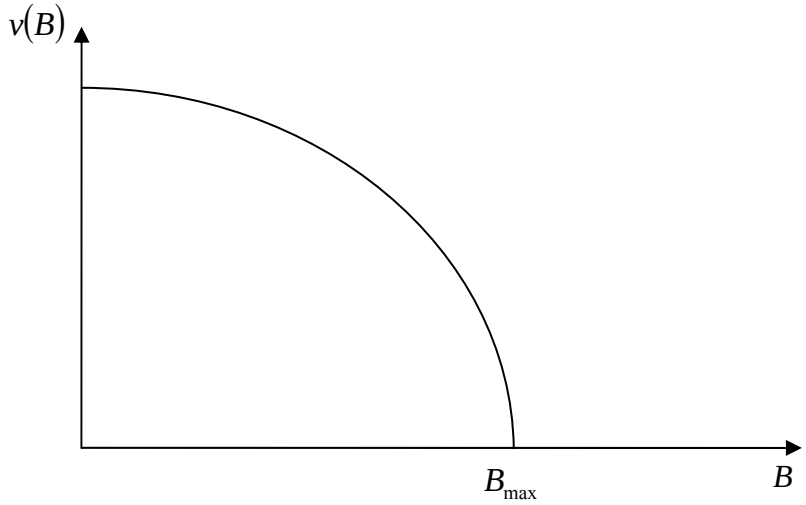


Figure 2.3

La forme de la fonction $v(B)$ signifie que si par exemple, le nombre total de vaches dans la prairie devient élevé, chacune des vaches ne disposera plus que d'une faible possibilité de pâturage, ce qui a pour conséquence de réduire son rendement individuel.

Les fermiers choisissent simultanément et indépendamment l'un de l'autre le nombre de vaches à faire paître dans la prairie. En supposant que les vaches sont parfaitement divisibles, l'espace des stratégies est donc $b_i \in [0, B_{\max}] \subset R^+$. L'utilité du fermier *i* est $b_i v(B) - cb_i$ et son programme est donc :

$$\underset{b_i}{\text{Max}} \;\; b_i v(B) - cb_i = b_i v(b_1 + \cdots + b_{i-1} + b_i + b_{i+1} + \cdots + b_n) - cb_i$$

Pour que le profil de stratégies $(b_1^*, \cdots, b_i^*, \cdots, b_n^*)$ soit un équilibre de Nash, il faut que pour tout *i*, b_i^* maximise l'utilité du fermier *i*, sachant que les autres fermiers choisissent

$b_{-i}^* = (b_1^*, \cdots, b_{i-1}^*, b_{i+1}^*, \cdots, b_n^*)$. La condition du premier ordre pour le programme du fermier *i* est donc :

$$v(b_i + b_{-i}^*) + b_i v'(b_i + b_{-i}^*) - c = 0$$

En raison des caractéristiques $v'(B) < 0$ et $v''(B) < 0$, la condition du second ordre est satisfaite. En substituant b_i par b_i^*, la condition du premier ordre devient :

$$v(b_i^* + b_{-i}^*) + b_i^* v'(b_i^* + b_{-i}^*) - c = 0$$

$$v(B^*) + b_i^* v'(B^*) - c = 0$$

Cette condition est valable pour tout fermier *i*. En sommant par rapport à tous les fermiers, on obtient :

$$nv(B^*) + B^* v'(B^*) - nc = 0$$

En divisant ensuite par *n*, cette équation devient :

$$v(B^*) + \frac{1}{n} B^* v'(B^*) - c = 0$$

Cette équation représente l'équilibre de Nash sous une forme implicite. Considérons maintenant l'alternative de la décision centralisée. Dans ce cas, il existe une autorité centrale, supposée neutre et sans coût (c'est l'hypothèse du bénévolat) qui choisit le nombre total de vaches de façon à maximiser une fonction objectif au niveau social. Soit B^{**} le nombre total de vaches socialement optimal. Le nombre B^{**} est donc la solution du programme suivant :

$$\underset{B}{Max}\, Bv(B) - cB$$

La condition du premier ordre est :[38]

$$v(B^{**}) + B^{**} v'(B^{**}) - c = 0$$

Nous montrons que dans l'alternative centralisée, le nombre de vaches est plus faible, c'est-à-dire $B^{**} < B^*$. Pour cela, supposons le contraire. La vérification de ces deux conditions d'optimalité entraîne de façon évidente que $B^{**} \neq B^*$. Supposons donc que $B^* < B^{**}$. La figure 2.4 représente cette hypothèse.

Ainsi que le montre cette figure, si $B^* < B^{**}$, alors $v(B^{**}) < v(B^*)$ et $v'(B^{**}) < v'(B^*) < 0$. Comme $B^* < B^{**}$, on a $B^{**} v'(B^{**}) < B^* v'(B^*) < 0$. Ceci implique que $B^{**} v'(B^{**}) < \frac{1}{n} B^* v'(B^*) < 0$. On a finalement $v(B^{**}) + B^{**} v'(B^{**}) - c < v(B^*) + \frac{1}{n} B^* v'(B^*) - c$.

[38] On peut vérifier que la condition du second ordre est ici également satisfaite.

Ceci constitue une contradiction car les conditions d'optimalité obtenues plus haut impliquent l'égalité $v(B^{**}) + B^{**}v'(B^{**}) - c = v(B^{*}) + \frac{1}{n}B^{*}v'(B^{*}) - c = 0$. En conséquence, l'hypothèse $B^{*} < B^{**}$ ne peut être acceptée. On a donc $B^{**} < B^{*}$.

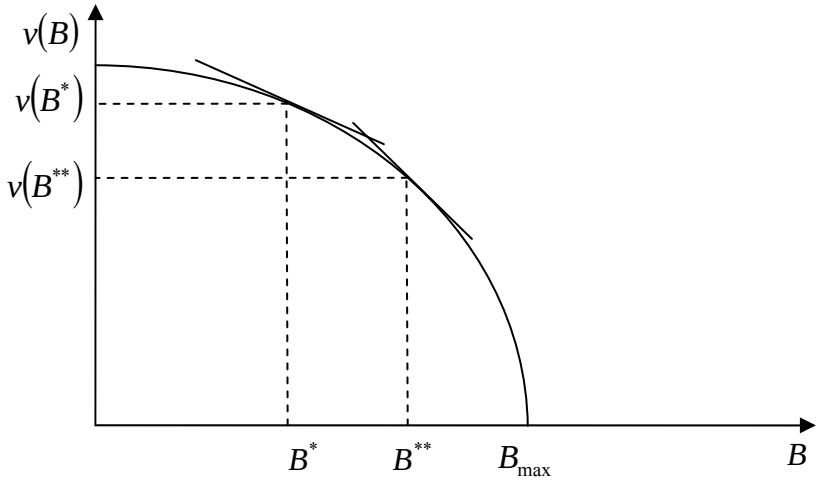


Figure 2.4 : La fonction $v(B)$ sous l'hypothèse que avec $B^{*} < B^{**}$

L'explication de cette conclusion est la suivante : dans l'équilibre non coordonné (non coopératif), chaque fermier prend une décision *individuellement* optimale sans tenir compte du coût qu'il induit sur les autres fermiers. Lorsqu'un fermier trouve qu'il est bénéfique pour lui de posséder une vache supplémentaire, il provoque, ce faisant, un coût supplémentaire pour les autres fermiers et ce, à travers la diminution de $v(B)$ qu'il aura provoquée. Dans ce cas, l'équilibre de Nash n'est pas socialement optimal, car les fermiers n'internalisent pas les effets externes négatifs qu'ils s'induisent les uns sur les autres. L'augmentation du bien-être induit par l'optique centralisée s'explique donc par la capacité de coordination de l'autorité centrale afin d'internaliser les effets externes. Lorsque le nombre de vaches est choisi de façon décentralisée, il s'ensuit donc un plus fort effet de congestion sur la prairie et le coût ainsi occasionné est un *coût de non-coordination*. Il faut cependant noter que cette conclusion peut s'avérer inexact si le $n+1^{\text{ème}}$ ne se comporte pas en joueur neutre ou nécessite des coûts de fonctionnement trop importants.

2.5. Le jeu de l'inspection

Le jeu de l'inspection fait intervenir un agent (par exemple un travailleur : joueur 1) et un principal (par exemple le contremaître : joueur 2).[39] Le travailleur a le choix entre travailler (*T*) ou tricher (*NT*). En travaillant, le joueur 1 produit une valeur *v* mais supporte un coût d'effort *g*. Le principal peut décider soit d'inspecter (*I*) soit de ne pas inspecter (*NI*). L'inspection a un coût *h* et permet au principal de s'assurer si l'agent a travaillé ou a triché. Le travailleur obtient un salaire *w* sauf s'il existe une preuve (suite à une inspection) qu'il a triché. Dans ce dernier cas, il obtient 0. Les deux joueurs choisissent leur stratégie de façon simultanée et toutes les données du jeu sont information commune. On a de plus $v > w > g > h > 0$. La matrice des paiements de ce jeu est donnée dans la figure 2.5 :

[39] Voir aussi Fudenberg D. & Tirole J. (1994) page 17.

Joueur 2

Joueur 1		$I\ (y)$	$NI\ (1-y)$
	$NT\ (x)$	$0\ ,\ -h$	$w\ ,\ -w$
	$T\ (1-x)$	$w-g\ ,\ v-w-h$	$w-g\ ,\ v-w$

Figure 2.5

Ce jeu n'admet aucun équilibre de Nash en stratégies pures. Pour déterminer l'équilibre de Nash en stratégies mixtes, désignons par $(x,\ 1-x)$ la stratégie mixte du joueur 1 avec x représentant la probabilité de joueur *NT* et $(y,\ 1-y)$ la stratégie mixte du joueur 2 avec y représentant la probabilité de jouer *I*.

En jouant *NT*, le joueur 1 obtient un paiement espéré égal à $0.y+w.(1-y)=w.(1-y)$. En jouant *T*, il obtient un paiement espéré égal à $(w-g).y+(w-g).(1-y)=w-g$. On obtient la stratégie mixte d'équilibre du joueur 2 lorsque les deux stratégies *T* et *NT* procurent au joueur 1 la même espérance de paiement, soit lorsque $w.(1-y)=w-g$. On obtient ainsi $g=y.w$, soit $y=\dfrac{g}{w}$.

Pour le joueur 2, la stratégie *I* permet d'obtenir un paiement espéré de $-hx+(v-w-h)(1-x)$ et la stratégie *NI* un paiement espéré de $-wx+(v-w)(1-x)$. On obtient la stratégie mixte d'équilibre du joueur 1 lorsque les deux stratégies *I* et *NI* procurent au joueur 2 le même paiement espéré, soit lorsque $-hx+(v-w-h)(1-x)=-wx+(v-w)(1-x)$. On obtient ainsi $h=wx$, soit $x=\dfrac{h}{w}$.

Ainsi, à l'équilibre de Nash, le principal choisit une probabilité d'inspection *y* telle que pour l'agent, le coût de l'effort *g* soit égal au salaire espéré $w\cdot y$. La probabilité d'inspection *y* est donc croissante par rapport au coût de l'effort *g* et décroissante par rapport au salaire *w*. En d'autres termes, la fréquence de l'inspection augmente pour les agents ayant une forte aversion pour l'effort ou recevant un salaire faible.

De même, à l'équilibre de Nash, l'agent choisira une probabilité de ne pas travailler telle que pour le principal, le coût d'inspection *h* soit égal au salaire espéré $w\cdot x$. La probabilité de ne pas travailler (tricher) *x* est donc croissante par rapport au coût de l'inspection et décroissant par rapport au salaire. En d'autres termes, la fréquence de la tricherie de l'agent augmente avec le coût (les difficultés) de l'inspection ou la faiblesse du salaire.

Les équations $g=y.w$ et $h=wx$ impliquent qu'à l'équilibre de Nash, on a $\dfrac{g}{y}=\dfrac{h}{x}$, soit :

$$\frac{\text{Probabilité de l'inspection}}{\text{Probabilité de tricher}}=\frac{\text{Coût de l'effort}}{\text{Coût de l'inspection}}$$

2.6. Le jeu de coordination et équilibres de Nash multiple

L'exemple classique du jeu de coordination est le jeu intitulé "la bataille des sexes". Ce modèle illustre également le problème de la multiplicité de l'équilibre de Nash. Il s'agit d'un jeu à deux joueurs, Elle et Lui. Les deux joueurs (Elle et Lui) veulent aller *ensemble* à un spectacle mais n'ont pas les mêmes préférences à propos de la nature du spectacle qui peut être le ballet (*B*) ou le football (*F*). Chaque joueur doit choisir indépendamment de l'autre le spectacle auquel il souhaite assister. S'il s'avère que les deux joueurs choisissent le même spectacle, Elle (Lui) obtient une utilité 2 s'il s'agit du ballet (football) et une utilité 1 s'il s'agit du football (ballet). Si les deux joueurs ne choisissent pas le même spectacle, chacun d'eux obtient une utilité 0. La matrice des paiements de ce jeu est la suivante :

		Elle	
		F	*B*
Lui	*F*	2 , 1	0 , 0
	B	0 , 0	1 , 2

Figure 2.7

Ce jeu admet deux équilibres de Nash en stratégies pures, soit : (*B*, *B*) et (*F*, *F*). Il est dans ce cas difficile de prévoir lequel de ces deux équilibres sera finalement retenu. Même s'il n'existe pas une théorie établie pour prédire l'équilibre d'un tel jeu, la littérature a retenu pour cela le mécanisme du *point focal* introduit par Schelling (1960).[40] Selon cet auteur, des éléments de l'environnement ou de l'histoire du jeu peuvent amener l'attention des joueurs à se focaliser sur un équilibre donné. Dans le jeu de la bataille des sexes, les deux joueurs se focalisent sur un des deux équilibres de Nash en se référant à des éléments en dehors du jeu. Par exemple, si les deux joueurs ont l'habitude d'alterner entre le football et le ballet et si la fois précédente le ballet a été choisi, alors l'équilibre de Nash le plus plausible est (*F*, *F*).

La possibilité de coordination en faveur d'un équilibre de Nash par la communication préalable est également une solution possible en cas de multiplicité des équilibres de Nash. Pour montrer cela, considérons le jeu suivant :

		Joueur 2	
		L	*R*
Joueur 1	*U*	800 , 800	800 , 0
	D	0 , 800	1000 , 1000

Figure 2.8

Ce jeu admet deux équilibres de Nash, à savoir (*U*, *L*) et (*D*, *R*). Si les deux joueurs pouvaient se coordonner avant de jouer, ils devraient choisir l'équilibre (*D*, *R*) car il est Pareto dominant par rapport à l'autre équilibre (*U*, *L*). Mais sans communication préalable, les joueurs peuvent être tentés de jouer *U* et *L* car ainsi, ils perçoivent 800 de façon certaine. En d'autres termes, l'équilibre (*U*, *L*) tout en étant Pareto dominé par l'équilibre (*D*, *R*) est moins risqué que ce dernier. En effet, pour le joueur 1 (resp. 2), le choix de l'action *U* (resp. *L*) lui procure un paiement de 800 quelque soit le choix du joueur 2 (resp. 1).

[40] Schelling, R. (1960). The Strategy of Conflict. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Chapitre 3 : Jeux dynamiques à information complète

La classe de jeux étudiée aux chapitres 1 et 2 représente une version très simplifiée de la réalité. Nous avons en particulier considéré que le jeu se déroule en une seule fois, excluant ainsi la dimension du temps. Dans ce chapitre, nous introduisons le fait qu'en réalité, le jeu est souvent soit répété, soit joué de façon séquentielle, ce qui donne la possibilité à au moins l'un des joueurs de *réagir* aux actions des autres joueurs après les avoir observées. Nous obtenons ainsi des *jeux dynamiques*.

Tout en maintenant l'hypothèse de l'information complète (c'est-à-dire que tous les joueurs connaissent toutes les données du jeu : l'ensemble des joueurs, les ensembles de stratégies et les fonctions de paiement), nous considèrerons que l'information peut être soit *parfaite* soit *imparfaite*. Par information parfaite, nous entendons la situation où le joueur à qui revient le tour de jouer connaît (observe et garde en mémoire) toute *l'histoire du jeu*. Par conséquent, l'information imparfaite décrit la situation où, à au moins un moment donné du jeu, le joueur à qui revient le tour de jouer ne connaît pas toute l'histoire du jeu.

Pour décrire un jeu dynamique, on utilise souvent un arbre de jeu qu'on appelle la *forme extensive* du jeu. La détermination de l'équilibre de Nash pour un jeu dynamique peut cependant s'effectuer à partir de la forme normale, mais cela nécessite l'utilisation d'une nouvelle définition du concept de *stratégie*. La contribution majeure dans la classe des jeux dynamiques est due à Selten (1975)[41] qui a permis l'application du concept de l'équilibre de Nash aux jeux dynamiques. Ceci a été rendu possible par l'introduction d'une nouvelle définition de la notion de stratégie qui devient un plan d'actions complet indiquant les actions du joueur en toute circonstance où il intervient. Un profil de stratégies définit donc une trajectoire qui est la séquence des choix des joueurs.

Une fois obtenue la forme normale d'un jeu, on peut rechercher le (s) équilibre (s) de Nash du jeu. L'équilibre de Nash est dans ce cas une trajectoire telle que à chaque point de cette trajectoire, aucun joueur n'a intérêt à dévier. On parle dans ce cas, d'un *équilibre de Nash parfait* ou simplement d'un *équilibre parfait*.

Nous verrons qu'une question centrale des jeux dynamiques est la *crédibilité*. En effet, dans un jeu dynamique en information complète, l'équilibre de Nash tel que défini pour un jeu simultané en information complète n'est pas suffisant pour écarter des stratégies non crédibles. Ceci implique la nécessité d'un raffinement du concept d'équilibre de Nash permettant ainsi d'éliminer les équilibres de Nash non crédibles. Le raffinement ainsi introduit a donné lieu à l'émergence de l'équilibre de Nash parfait (Subgame-Perfect Nash Equilibrium – SPNE) ou tout simplement de l'équilibre parfait. L'équilibre parfait, plus restrictif que l'équilibre de Nash, est basé sur le *principe de la rationalité séquentielle*, principe selon lequel un tel équilibre doit spécifier un comportement optimal à partir de n'importe quel point du jeu. On peut s'assurer de la satisfaction d'une telle restriction en utilisant la procédure de *récurrence vers l'amont* (*Backwards Induction*).[42]

---

[41] Selten "A Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games," *International Journal of Game Theory*, IV (1975), 25-55.
[42] Appelée également induction à rebours.

Les classes de jeux dynamiques étudiés dans ce chapitre sont :

- Jeu séquentiel (les joueurs jouent à tour de rôle) à information complète et parfaite où la solution (l'équilibre de Nash parfait) peut être obtenue par la méthode de récurrence vers l'amont (*Backwards induction*). L'application considérée pour illustrer cette classe de jeu est le modèle de duopole de Stackelberg (1934) ;
- Jeu répété où les joueurs jouent simultanément de façon répétée. Les applications considérées pour illustrer cette classe de jeux sont le *free riding* (aléa moral) répété infiniment et la collusion dans le duopole de Cournot.

3.1. La forme extensive

Dans le chapitre 1, nous avons introduit la forme normale pour représenter les jeux statiques à information complète. Dans le présent chapitre, nous introduisons la forme extensive pour représenter les jeux dynamiques. Nous montrerons ainsi comment représenter un jeu statique par la forme extensive et un jeu dynamique par la forme normale. Nous verrons ainsi comment un jeu statique à information complète peut être interprété comme étant un jeu dynamique à information imparfaite. Il peut être cependant plus commode d'utiliser telle ou telle forme pour représenter un jeu donné.

3.1.1. La forme extensive d'un jeu dynamique

La forme extensive d'un jeu spécifie les données suivantes du jeu :[43]

- Les joueurs concernés par le jeu ;
- Les moments où chaque joueur aura à jouer ;
- Les actions possibles de chaque joueur au moment où il joue ;
- L'information dont dispose chaque joueur au moment où il joue ;
- Les paiements des joueurs pour chacune des combinaisons possibles d'actions.

Pour illustrer l'utilisation de la forme extensive, considérons le jeu suivant :

- Le joueur 1 choisit une action a_1 de l'ensemble des actions $A_1 = \{L, R\}$;
- Le joueur 2 observe a_1 et choisit une action a_2 de l'ensemble des actions $A_2 = \{U, D\}$;
- Le jeu s'arrête et les paiements sont donnés par $u_1(a_1, a_2)$ et $u_2(a_1, a_2)$.

Ce jeu est représenté par l'arbre de jeu suivant :

[43] Voir par exemple Mas-Colell, Whinston and Green (1995). Page 219.

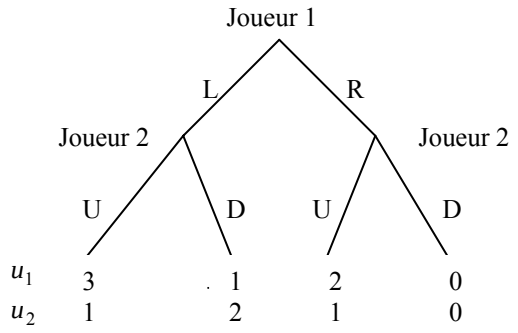


Figure 3.1

Ce schéma montre que l'arbre de jeu (la forme extensive du jeu) commence par un nœud de décision du joueur 1 lorsque le tour de jouer lui revient. Ici, il a à choisir entre les actions *L* et *R*. Par la suite apparaissent deux autres nœuds de décision où, après avoir observé le choix du joueur 1, il revient au joueur 2 de choisir entre les actions *U* et *D*. A la fin de chaque combinaison disjointe de choix, on a un nœud final qui indique la fin du jeu et où apparaissent les paiements des joueurs.

L'exemple de cet arbre de jeu représente un jeu dynamique à information complète et parfaite, c'est-à-dire un jeu où 1) les joueurs jouent de façon séquentielle et 2) à chaque étape du jeu, tous les précédents choix sont connaissance commune.

3.1.2. Représentation d'un jeu statique par la forme extensive

Nous avons introduit les jeux statiques comme étant des jeux où les joueurs choisissent leurs actions *simultanément*. L'exemple du dilemme du prisonnier a été construit sur cette base. Mais en fait, le même résultat aurait été obtenu si les prisonniers avaient joué de façon séquentielle avec cependant la condition que le joueur jouant en seconde position n'observe pas le choix du joueur jouant en première position. On peut de ce fait représenter le jeu du dilemme du prisonnier (jeu simultané) par le jeu dynamique suivant :[44]

1. Le prisonnier 1 choisit une action a_1 de l'ensemble des actions $A_1 = \{\text{avouer}, \text{ne pas avouer}\}$;
2. Le prisonnier 2 n'observe pas l'action a_1 choisie par le prisonnier 1 et choisit une action a_2 de l'ensemble des actions $A_2 = \{\text{avouer}, \text{ne pas avouer}\}$.
3. Les paiements sont donnés par $u_1(a_1, a_2)$ et $u_2(a_1, a_2)$.

De ce fait, on a interprété un jeu statique à information complète comme étant un jeu dynamique à information complète et imparfaite. La figure 3.2 montre comment peut-on représenter par la forme normale un jeu simultané.

[44] On aurait eu également le même résultat si le prisonnier 2 avait joué en premier et le prisonnier 1 en second avec toujours la même condition de non observation du choix du joueur ayant joué en premier.

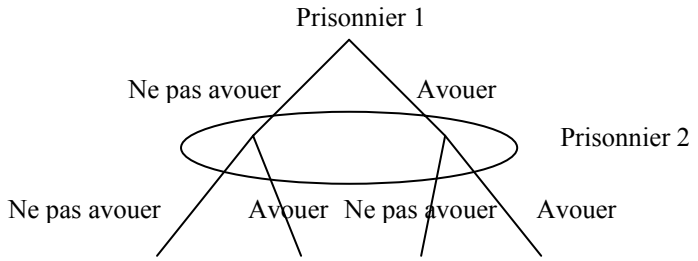


Figure 3.2

On remarque ainsi que les deux jeux dynamiques précédemment décrits (figures 3.1 et 3.2) sont similaires en tout point, sauf concernant l'observabilité de l'action choisie lors de la première étape *avant* le choix de la deuxième étape. L'information disponible pour le joueur devant jouer est donc cruciale pour la description d'un jeu. Pour représenter l'état des connaissances des joueurs (ce qu'ils savent et ce qu'ils ne savent pas), on utilise la notion d'ensemble d'information.

<u>Définition de l'ensemble d'information :</u> Un ensemble d'information pour un joueur est une collection de nœuds de décision ayant les caractéristiques suivantes :

- Le joueur joue à l'un des nœuds de décision inclus dans l'ensemble d'information ;
- Lorsque le jeu atteint un nœud de décision à l'intérieur d'un ensemble d'information, le joueur qui doit jouer ne sait pas quel est le nœud de décision qui est atteint.

Notons que la seconde condition de cette définition implique que les nœuds de décision inclus dans un ensemble d'information doivent avoir les mêmes actions possibles, sinon le joueur peut inférer sur le nœud de décision atteint à partir des actions qu'il peut choisir. Pour exprimer l'idée que des nœuds de décision font partie d'un même ensemble d'information, on les entoure avec la même ellipse, comme il ressort dans la figure 3.2 représentant la forme extensive du jeu (*simultané*) du dilemme du prisonnier. Cette représentation de l'ensemble d'information du prisonnier 2 signifie que ce dernier ne sait pas quel nœud de décision de cet ensemble est atteint. Tout ce qu'il sait est que le prisonnier 1 a choisi l'une des deux actions possibles (ne pas avouer, avouer).

Considérons un autre exemple (en négligeant les paiements) pour illustrer comment utiliser le concept d'ensemble d'information pour décrire l'état des connaissances d'un joueur au moment où il joue.

1. Le joueur 1 choisit une action a_1 de l'ensemble des actions $A_1 = (L, M, R)$
2. Le joueur 2 observe si $a_1 = L$ ou non et choisit une action a_2 de l'ensemble des actions $A_2 = (U, D)$.

La forme extensive de ce jeu est donnée par la figure 3.3.a :

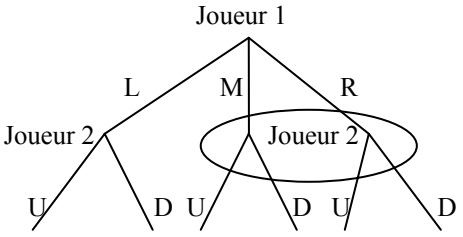


Figure 3.3.a

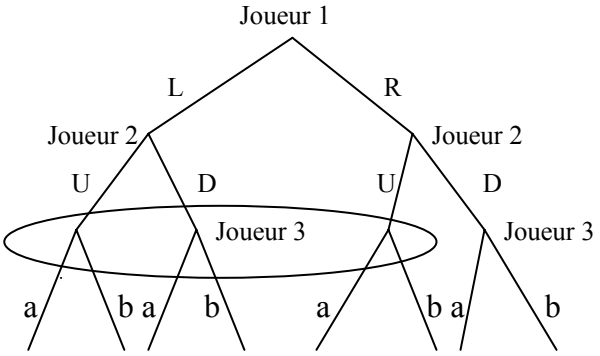


Figure 3.3.b

Cette figure montre que le joueur 2 dispose de deux ensembles d'information :

- Un singleton qui fait suite au choix de *L* du joueur 1.
- Un ensemble d'information (non singleton) englobant les deux autres nœuds de décision du joueur 2 et qui fait suite au choix de *M* ou *R* par le joueur 1.

Nous pouvons utiliser la notion d'ensemble d'information pour obtenir une définition alternative permettant de distinguer entre un jeu à information parfaite et un jeu à information imparfaite. Dans un jeu dynamique à information parfaite, le joueur à qui revient le tour de jouer connaît toute l'histoire du jeu. Il observe ainsi quel est le nœud de décision atteint dans le jeu. Les ensembles d'information des joueurs sont donc tous des singletons.

Ainsi, on dira qu'un jeu dynamique est à information parfaite quand tous les ensembles d'information du jeu sont des singletons. Par conséquence, un jeu est à information imparfaite lorsqu'au moins un ensemble d'information du jeu n'est pas un singleton. Ainsi, la forme extensive d'un jeu simultané à information complète (par exemple, le dilemme du prisonnier) est représentative d'un jeu dynamique à information imparfaite.

3.1.3. La notion de sous-jeu

La forme extensive d'un jeu dynamique est une succession de nœuds de décision dont certains sont le début d'un jeu à part entière qu'on appelle sous-jeu. L'identification de ces sous-jeux s'avère être importante pour la détermination de l'issue d'un jeu dynamique.

<u>Définition d'un sous-jeu :</u> Un sous-jeu dans un jeu dynamique est un sous-ensemble du jeu ayant les propriétés suivantes :[45]

a. Il débute à un nœud de décision *x* singleton (ensemble d'information contenant un seul nœud de décision) ;
b. Il contient tous les nœuds de décision successeurs (immédiats ou lointains) et ne contient que ces nœuds ;
c. Si le nœud de décision *y* appartient à ce sous-jeu, alors tout nœud *y*' de *H*(*y*) appartient à ce sous-jeu, où *H*(*y*) désigne l'ensemble de décision contenant le nœud de décision *y*. (En d'autres termes, il n'existe pas d'ensemble d'information cassé).

[45] Voir Mas-Colell, Whinston and Green (1995). Page 219.

La restriction c) signifie que si un nœud *y* se trouve à la suite du nœud *x*, alors tous les nœuds inclus dans l'ensemble d'information contenant *y* doivent se trouver également à la suite du nœud *x*. Une conséquence de la condition c) est la suivante : un sous-jeu est tel que à tout nœud *y* suivant le nœud *x*, le joueur qui doit jouer sait que le nœud *x* a été atteint.

Pour illustrer cette définition, considérons le jeu dynamique à information imparfaite décrit dans la figure 3.3.b dans lequel, au moment de joueur, le joueur 3 observe si $(a_1, a_2) = (R, D)$ ou non et choisit une action a_3 de $A_3 = (a, b)$.

Dans ce jeu, il n'existe qu'un seul sous-jeu, celui correspondant au nœud de décision du joueur 3 suivant les décisions *R* et *D*. Ainsi, la partie de l'arbre de jeu commençant par le noeud de décision du joueur 2 suivant *L* ne constitue pas un sous jeu car l'ensemble d'information qui suit contient un nœud de décision qui est successeur du choix de *R* et non de *L*. La restriction c) interdit également de considérer ce nœud comme un sous-jeu.

3.2. Jeu séquentiel à information complète et parfaite

Dans un jeu séquentiel à information complète et parfaite, les joueurs jouent à tour de rôle. Au moment de choisir, chaque joueur connaît parfaitement l'histoire du jeu. La méthode de récurrence vers l'amont (*Backward Induction*) permet de trouver la séquence optimale du jeu.[46]

3.2.1. La procédure de Récurrence vers l'amont (Backwards induction)

Pour un jeu dynamique à information complète et parfaite, l'issue du jeu peut être déterminé par la méthode de la récurrence vers l'amont.[47] Pour montrer cela, considérons le jeu suivant :

- Le joueur 1 choisit une action a_1 de l'ensemble A_1 ;
- Le joueur 2 observe a_1, l'action choisie par le joueur 1 et choisit à son tour une action a_2 de l'ensemble A_2 ;
- Le jeu s'arrête et le paiement de deux joueurs est donné par les fonctions $u_1(a_1, a_2)$ et $u_2(a_1, a_2)$.

Plusieurs modèles correspondent à cette classe de jeu comme par exemple le modèle de duopole de Stackelberg (1934). Au moment de jouer, le joueur 2 observe l'action a_1 choisie par le joueur 1. Il choisit une action a_2 qui soit la meilleure réponse à a_1 et est donc la solution du programme suivant :

$$\underset{a_2 \in A_2}{\text{Max}}\, u_2(a_1, a_2)$$

[46] Voir K. Binmore pour une discussion critique de la relation entre rationalité et méthode de récurrence vers l'amont.

[47] Remarquons que nous n'avons pas utilisé le concept d'équilibre de Nash, car la méthode de récurrence vers l'amont n'est pas définie en termes de stratégies mais en termes d'actions.

En supposant, pour simplifier, que cette meilleure réponse est unique, on a donc $a_2^* = MR_2(a_1)$.[48] Etant dans un cadre d'information complète, le joueur 1 connaît $u_2(a_1, a_2)$ la fonction de paiement du joueur 2 et sait qu'il est rationnel. Le joueur 1 peut donc anticiper $MR_2(a_1)$ la meilleure réponse du joueur 2. Il intégrera donc $MR_2(a_1)$ dans son programme. De ce fait, le joueur 1 choisit son action qui soit la solution du programme suivant :

$$\underset{a_1 \in A_1}{\text{Max}} \; u_1(a_1, MR_2(a_1))$$

En supposant encore que ce problème de maximisation n'admette qu'une seule réponse a_1^*, alors $(a_1^*, MR_2(a_1^*))$ est l'issue du jeu selon la méthode de Récurrence vers l'amont. Notons que la solution obtenue par la méthode de Récurrence vers l'amont n'inclut aucune menace non crédible du joueur 2. En d'autres termes, le joueur 1 n'a aucune croyance selon laquelle, après avoir observé a_1, le joueur 2 n'agira pas dans son propre intérêt.

Pour montrer comment obtenir la solution d'un jeu séquentiel à information complète et parfaite par la méthode de récurrence vers l'amont, considérons le jeu décrit par la figure 3.1. Etant données les hypothèses de rationalité et de connaissance commune, le joueur 1 sait que s'il choisit L, la meilleure réponse du joueur 2 sera de jouer D car il obtient ainsi un paiement de 2 au lieu de 1. De même, il sait que s'il joue R, la meilleure réponse du joueur 2 sera de choisir U car lui procurant un paiement de 2 au lieu de 0. Etant données ces anticipations, on peut remplacer le jeu de la figure 3.1 par la forme extensive *réduite* suivante :

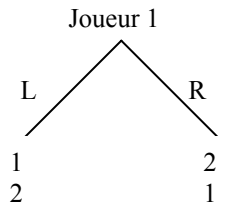


Figure 3.4

Cette forme réduite est obtenue après avoir remplacé chacun des sous-jeux du joueur 2 (l'un débutant après l'action *L* et l'autre après l'action *R*) par les paiements résultants du choix optimal du joueur 2. Le meilleur choix pour le joueur 1 est de jouer R. La figure suivante résume l'issue du jeu obtenue par la méthode de Récurrence vers l'amont.

[48] $MR_1(a_2)$ est la fonction (ou correspondance) de meilleure réponse du joueur 1 à l'action a_2 du joueur 2. Au chapitre 2, cette fonction (ou correspondance) a été notée par $b_1(a_2)$.

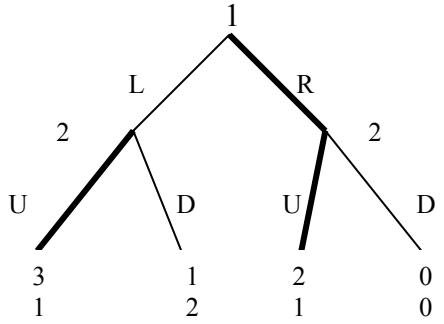


Figure 3.5

D'une façon générale, la procédure de Récurrence vers l'amont s'applique à la classe des jeux finis à information parfaite.

3.2.2. Application de la récurrence vers l'amont : le modèle de duopole de Stackelberg

Le modèle de duopole de Stackelberg (1934) est un exemple de jeu dynamique à information complète et parfaite qui peut être résolu par la méthode de Récurrence vers l'amont. On considère un marché où existent deux firmes. L'une (la firme 1) est le leader et l'autre (la firme 2) est le follower. La décision à prendre pour chaque firme porte sur la quantité à produire. Par rapport au modèle de Cournot où les quantités sont choisies *simultanément* par les deux firmes, dans le modèle de Stackelberg, les quantités sont choisies de façon *séquentielle*. Le déroulement du jeu est donc le suivant :[49]

- La firme 1 choisit une quantité $q_1 \geq 0$.
- La firme 2 observe q_1 et choisit une quantité $q_2 \geq 0$.
- Le jeu s'arrête et les deux firmes obtiennent un profit selon la fonction $\pi_i(q_1, q_2) = q_i(P(Q) - c)$.

Pour simplifier, on considère que le coût unitaire de production *c*, est constant (les coûts fixes de production supposés nuls) et identique pour les deux entreprises. La quantité totale offerte par les deux firmes est $Q = q_1 + q_2$ et $P(Q)$ est la fonction de demande inverse donnant le prix d'équilibre du marché en fonction de la quantité totale offerte par les deux firmes. Pour simplifier, on considère que cette fonction prend la forme linéaire $P(Q) = a - bQ$ avec $a \geq c$, ce qui donne le graphe de la figure 3.6 :

[49] Voir également Gibbons R. (1992). Page 61.

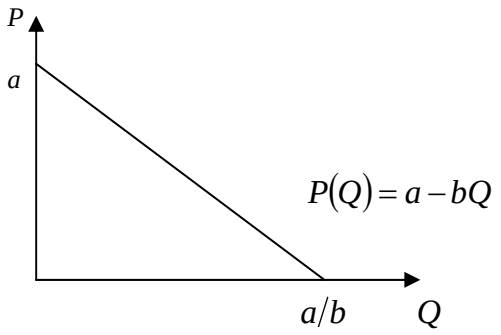


Figure 3.6

La résolution du jeu par la méthode de Récurrence vers l'amont (*Backwards Induction*) commence par la détermination du choix optimal de la firme 2. Celle-ci choisit la quantité q_2 après avoir observé la quantité q_1 choisie par la firme 1. Le choix de la firme 2 est donc la solution du programme suivant :

$$\underset{q_2 \geq 0}{\text{Max}} \quad \pi_2(q_1, q_2) = q_2 \cdot (a - b \cdot (q_1 + q_2) - c)$$

La condition nécessaire et suffisante est :

$$\frac{d\pi_2}{dq_2} = a - bq_1 - 2bq_2 - c = 0$$

Ce qui donne $q_2^* = MR_2(q_1) = \dfrac{a - bq_1 - c}{2b}$.

Etant donnée l'hypothèse d'information complète (chaque firme connaît la fonction de paiement de l'autre), la firme 1 peut anticiper la réponse $MR_2(q_1)$ de la firme 2. Elle choisira donc une quantité q_1^* en tenant compte de la meilleure réponse $q_2^* = MR_2(q_1)$ de la firme 2. La quantité q_1^* est donc la solution du programme suivant :

$$\underset{q_1 \geq 0}{\text{Max}} \quad \pi_1(q_1, q_2^*) = q_1 \cdot (a - b \cdot (q_1 + q_2^*) - c) = q_1 \cdot (a - b(q_1 + MR_2(q_1)) - c) = q_1 \frac{a - bq_1 - c}{2}$$

La condition nécessaire et suffisante est donc :

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = \frac{a - 2bq_1 - c}{2} = 0$$

Ce qui donne $q_1^* = \dfrac{a-c}{2b}$ et donc $q_2^* = MR_2(q_1^*) = \dfrac{a - bq_1^* - c}{2b} = \dfrac{a-c}{4b}$. La solution du modèle de duopole de Stackelberg est donc $(q_1^*, q_2^*) = \left(\dfrac{a-c}{2b}, \dfrac{a-c}{4b}\right)$.

En comparant par rapport au résultat du modèle de Cournot, on peut remarquer que la quantité choisie par le leader $q_1^* = \frac{a-c}{2b}$ est supérieure à la quantité choisie par chaque firme en situation de choix simultanés $q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3b}$, elle-même supérieure à la quantité choisie par le follower $q_2^* = \frac{a-c}{4b}$.

La quantité totale produite dans le choix séquentiel, $Q_s^* = q_1^* + q_2^* = \frac{3(a-c)}{4b}$ est supérieure à celle produite en situation de choix simultanés, soit $Q_c^* = \frac{2(a-c)}{3b}$. Comme conséquence, le prix de marché dans le modèle de Stackelberg est inférieur au prix de marché correspondant au modèle de Cournot. Il en résulte que par rapport à la situation de choix simultanés, le follower obtient un profit inférieur.

Dans ce modèle, la firme 2 (follower) voit son profit diminuer par rapport à la situation de choix simultanés. Dans le jeu séquentiel à information parfaite, la firme 2 observe l'action de la firme 1 et prend une décision optimale en tenant compte de la décision de la firme 1. La réduction de son profit provient donc du fait que la firme 1 sait que la firme 2 observe sa décision et que cette dernière devient une donnée pour la firme 2. La firme 1 est donc moins contrainte, ce qui lui permet d'améliorer sa situation au détriment de celle de la firme 2. Le fait donc de joueur en premier devient favorable, mais à la condition que le joueur 2 (le joueur jouant en second) observe la décision du joueur 1 (le joueur jouant en premier) et que le joueur 1 sait que le joueur 2 observe la décision du joueur 1 et en tiendra compte pour prendre sa propre décision.

La comparaison entre le modèle de Stackelberg et le modèle de Cournot montre l'importance de la question de savoir "qui joue en premier". En d'autres termes, cette question n'est pas neutre. Par exemple, dans la conquête d'un nouveau marché, l'entreprise qui se positionne en premier a de ce fait un avantage par rapport aux entreprises qui s'installent par la suite.

3.3. L'Equilibre de Nash Parfait (SPNE)

L'équilibre de Nash a été défini et démontré pour des jeux sous forme normale, c'est-à-dire des jeux simultanés à information complète. Lorsque le jeu est dynamique, la simultanéité des choix n'est plus possible, car au moins l'un des joueurs a l'opportunité de réagir aux choix des autres joueurs. Il est cependant possible d'utiliser le concept de l'équilibre de Nash, mais en utilisant une nouvelle définition de la notion de stratégie. Cette définition doit pouvoir rétablir la simultanéité du choix des joueurs. Mais, l'application tel quel de l'équilibre de Nash aux jeux dynamiques ne permet pas toujours d'écarter des équilibres non crédibles. Pour éliminer ces derniers, on introduit un raffinement de l'équilibre de Nash et on obtient ainsi l'équilibre de Nash parfait. Il s'agit de la perfection en sous-jeux (subgame perfection).

Pour qu'un profil de stratégies soit un Equilibre de Nash Parfait, il faut non seulement qu'il soit un équilibre de Nash, mais également il faut qu'il satisfasse une contrainte

supplémentaire, à savoir celle du principe de rationalité séquentielle. Selon ce principe, un équilibre doit spécifier un comportement optimal à partir de n'importe quel point du jeu.

Définition (Selten, 1965) : Un équilibre de Nash est parfait si les stratégies des joueurs constituent un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux du jeu.[50]

Proposition : Tout jeu dynamique fini à information complète (nombre fini de joueurs ayant un nombre fini de stratégies) admet un équilibre de Nash parfait, possiblement en stratégies mixtes.

Pour montrer cela, rappelons qu'un jeu dynamique (qu'il soit à information parfaite ou à information imparfaite) peut être représenté par la forme normale tout comme un jeu statique à information complète. Or, on a vu que tout jeu fini simultané à information complète admet un équilibre de Nash, possiblement en stratégies mixtes. En second lieu, un jeu dynamique fini à information complète a un nombre fini de sous-jeux.

3.3.1. Représentation d'un jeu dynamique par la forme normale

Rappelons que le concept d'équilibre de Nash a été défini pour des jeux sous forme normale où les joueurs prennent leur choix de façon simultanée. Pour ces jeux, on n'a introduit aucune différence entre action et stratégie, de sorte que l'ensemble des stratégies d'un joueur est tout simplement l'ensemble des actions ou choix disponibles. Dans un jeu dynamique, la simultanéité des choix n'existe plus car au moins un des joueurs peut réagir aux décisions des autres joueurs. On peut cependant retrouver la simultanéité des choix et donc la forme normale si on donne une nouvelle définition à la notion de stratégie. Dans un jeu dynamique, une stratégie devient un *plan complet d'actions*, comme le précise la définition suivante :

Définition de la stratégie : Dans un jeu dynamique, une stratégie pour un joueur est un plan d'actions complet qui spécifie une action pour le joueur pour toutes les contingences possibles (pour toutes les histoires possibles des étapes passées) et à chaque étape où il doit jouer.

Pour illustrer cette définition, prenons le cas d'un dirigeant d'entreprise (le joueur 1) devant s'absenter et laisser les instructions à son adjoint pour par exemple poursuivre la négociation d'un contrat. Une stratégie laissée à l'adjoint doit lui permettre de jouer le jeu sans aucune nécessité de se référer à son responsable. La stratégie doit donc lui indiquer l'action à choisir pour chaque histoire possible du jeu.

3.3.2. Détermination de l'Equilibre de Nash Parfait pour un jeu dynamique à information complète et parfaite

Pour pouvoir appliquer l'équilibre de Nash, nous devons considérer toutes les stratégies possibles de chaque joueur, car la recherche de l'équilibre de Nash nécessite la détermination de la meilleure réponse d'un joueur à toutes les stratégies possibles des autres joueurs.

[50] Selten, R. (1975). "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games". International Journal of Game Theory. Vol. 4. P 25-55.

Pour montrer comment passer de la forme extensive à la forme normale en utilisant la définition précédente de la stratégie, considérons de nouveau le jeu séquentiel de la figure 3.1. Pour le joueur 1, il n'existe que deux stratégies possibles, autant que d'actions : *L* et *R*. Ceci est le cas puisque jouant au début du jeu, le joueur 1 ne connaît aucune contingence. Par contre, le joueur 2 intervient dans 2 situations contingentes différentes : il peut observer soit *L* soit *R*. Il peut choisir parmi 2 actions dans chaque contingence. De ce fait, le joueur 2 dispose de 4 stratégies différentes et qui sont :[51]

- Stratégie 1 que nous noterons par (*U*, *U*)
  - Jouer *U* si le joueur 1 a choisi *L*.
  - Jouer *U* si le joueur 1 a choisi *R*.

- Stratégie 2 que nous noterons par (*U*, *D*)
  - Jouer *U* si le joueur 1 a choisi *L*.
  - Jouer *D* si le joueur 1 a choisi *R*.

- Stratégie 3 que nous noterons par (*D*, *U*)
  - Jouer *D* si le joueur 1 a choisi *L*.
  - Jouer *U* si le joueur 1 a choisi *R*.

- Stratégie 4 que nous noterons par (*D*, *D*)
  - Jouer *D* si le joueur 1 a choisi *L*.
  - Jouer *D* si le joueur 1 a choisi *R*.

Avec ces nouveaux espaces de stratégies des 2 joueurs, on obtient la forme normale du jeu dynamique de la figure 3.1 à laquelle on peut appliquer la procédure de recherche de l'équilibre de Nash.

Joueur 2

Joueur 1		(*U* , *U*)	(*U* , *D*)	(*D* , *U*)	(*D* , *D*)
	L	3 ; 1	3 ; 1	1 ; 2	1 ; 2
	R	2 ; 1	0 ; 0	2 ; 1	0 ; 0

Figure 3.7

La résolution du jeu en utilisant la forme normale fait apparaître deux équilibres de Nash : $(R,(D,U))$ et $(L,(D,D))$. L'équilibre de Nash $(R,(D,U))$ correspond à la trajectoire en gras de la figure 3.8a.

Le profil de stratégies $(R,(D,U))$ est un équilibre de Nash parfait pour deux raisons : 1) L'équilibre de Nash $(R,(D,U))$ spécifie une stratégie complète (une action pour chaque contingence) pour le second joueur ; 2) Cet équilibre constitue un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux du jeu.[52]

[51] Voir également Gibbons R. (1992). Page 118.
[52] Remarquons qu'en plus du jeu lui-même, ce jeu admet deux sous-jeux commençant au nœud de décision du joueur 2.

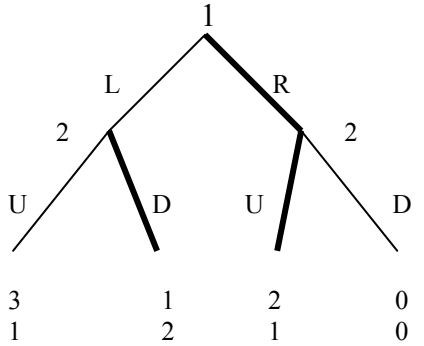


Figure 3.8a

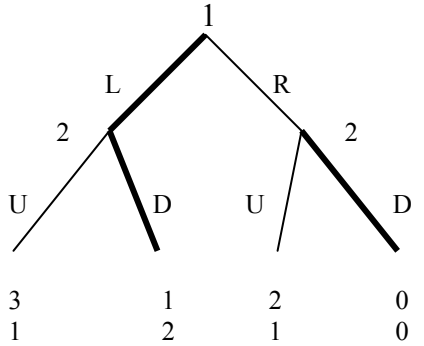


Figure 3.8b

Le deuxième équilibre de Nash $(L,(D,D))$ est décrit dans la figure 3.8b. Dans cet équilibre, le joueur 2 choisit D quelque soit le choix du joueur 1. Dans cette éventualité, le meilleur choix du joueur 1 est L obtenant ainsi le paiement de 1 au lieu de 0. Mais cet équilibre n'est pas un équilibre de Nash parfait car les stratégies des joueurs ne sont pas des équilibres de Nash dans tous les sous-jeux. En effet, l'action D du joueur 2 faisant suite à l'action R du joueur 1 n'est pas la meilleure réponse du joueur 2. En effet, après R, la meilleure réponse du joueur 2 est U. Autrement dit, l'action D si le joueur 1 choisit R n'est pas une action (ou menace) crédible. De ce fait, l'issue $(L,(D,D))$ n'est pas un équilibre de Nash parfait, car il n'est pas un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux.

Relevons la différence existant entre l'issue obtenue par la méthode de Récurrence vers l'amont (figure 3.5) et l'équilibre de Nash parfait (figure 3.8a). Même si les deux méthodologies aboutissent au même résultat (le joueur 1 joue R et obtient un paiement de 2 et le joueur 2 joue U et obtient un paiement de 1), l'équilibre de Nash parfait s'exprime en termes de stratégies alors de la récurrence vers l'amont s'exprime en termes d'actions.

3.3.3. Le jeu de prédation (guerre des prix)

Cette situation de jeu fait intervenir 2 firmes, la firme E (Entrant) souhaitant entrer dans un marché et la firme I (la firme en place) ayant actuellement le monopole ou la domination du marché.[53] Si la firme E décide d'entrer dans le marché, la firme I peut réagir (répondre) de l'une des deux manières suivantes :

- La firme I peut tolérer la présence de la firme E en lui laissant une part du marché et par conséquent laissant inchangé le niveau des prix ;
- La firme I peut être hostile à la présence de la firme E en engageant une guerre des prix (dumping) occasionnant des pertes (ou faisant réduire les bénéfices) pour les deux parties.

Cette situation de jeu peut être représentée sous les formes normale et extensive suivantes :

[53] Voir aussi Mas-Colell, Whinston and Green (1995). Page 273.

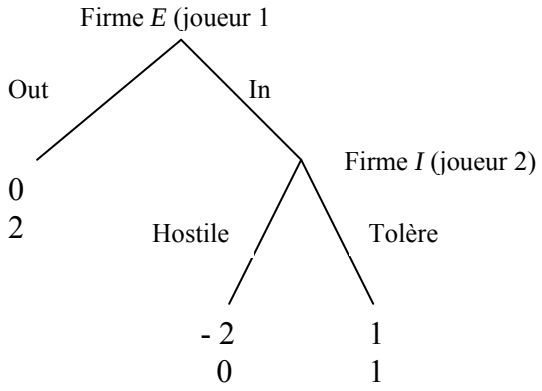


Figure 3.9a

Firme *I*

		Hostile si la firme *E* choisie "In"	Tolère si la firme *E* choisie "In"
Firme *E*	Out	0 ; 2	0 ; 2
	In	-2 ; 0	1 ; 1

Figure 3.9b

En se basant sur la forme normale, on relève que ce jeu admet deux équilibres de Nash :

- $\left(s_E^*, s_I^*\right)$ = (Out , Hostile si la firme *E* choisit "In") ;
- $\left(s_E^*, s_I^*\right)$ = (In , Tolérer si la firme *E* choisit "In").

L'analyse du jeu à partir de la forme extensive montre cependant que le premier équilibre n'est pas une prédiction raisonnable. En effet, cette forme de présentation du jeu fait bien ressortir que si la firme *E* choisie "In", alors la meilleure réponse de la firme *I* est de tolérer car elle obtiendra ainsi un paiement de 1 au lieu de 0. En d'autres termes, la stratégie de la firme *I* " Hostile si la firme *E* choisie "In"" n'est pas crédible.

La crédibilité est ainsi une restriction naturelle à imposer à l'équilibre de Nash. Elle consiste à écarter les équilibres de Nash (qui sont déterminés à partir de la forme normale) qui spécifie une action non optimale de l'un quelconque des joueurs. Dans ce jeu, le seul équilibre de Nash parfait est donc le profil de stratégies (In, Tolérer si la firme *E* choisit "In").

Ainsi, pour éliminer les prédictions non raisonnables (ici, le profil de stratégies (out, Hostile si la firme *E* choisie "In")) les stratégies à jouer à l'équilibre doivent satisfaire la principe de la rationalité séquentielle. Pour qu'un équilibre soit acceptable, il doit spécifier des actions optimales en tout point du jeu. Il s'agit d'une condition supplémentaire qui est l'exigence de rationalité séquentielle. En d'autres termes, lorsqu'il revient à un joueur le tour de jouer, sa stratégie doit être optimale à partir de ce point étant donnée l'information dont il dispose sur les stratégies des autres joueurs.

Pour identifier les équilibres de Nash désirables, c'est-à-dire les équilibres de Nash satisfaisant la condition de rationalité séquentielle, on détermine la stratégie optimale à partir de la fin de l'arbre de jeu. On obtient ensuite la stratégie optimale à l'étape antérieure étant donné le résultat de la dernière étape et ainsi de suite jusqu'au début du jeu. Cette procédure de Récurrence vers l'amont (Backwards Induction) est dérivée directement de la condition de rationalité séquentielle car elle assure que les stratégies des joueurs sont optimales à chaque étape du jeu.

Pour déterminer un équilibre de Nash parfait, on commence donc par identifier les plus petits sous-jeux contenant les nœuds terminaux. On remplace par la suite ces plus petits sous-jeux par les paiements correspondant à l'équilibre de Nash. Les nœuds initiaux de ces sous-jeux deviennent les nœuds terminaux du jeu tronqué des plus petits sous-jeux. On renouvelle la

même procédure pour le nouveau jeu (le jeu tronqué). En appliquant cette méthode de Récurrence vers l'amont pour tout l'arbre de jeu, on obtient l'équilibre de Nash parfait (SPNE) car les stratégies des joueurs constituent un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux.

Dans le jeu de prédation, on peut donc remplacer le sous-jeu de la firme *I* par son résultat. Comme le montre la figure 3.10, on obtient ainsi la forme extensive réduite du jeu où le choix optimal de la firme *E*, "In", devient plus aisé à déterminer.

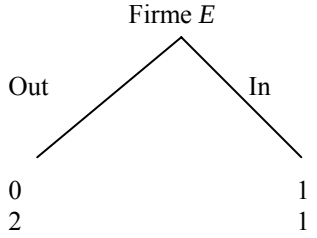


Figure 3.10

3.4. Jeux répétés

Dans un jeu séquentiel, les joueurs jouent à tour de rôle. Dans un jeu répété, les joueurs jouent simultanément de façon répétée. Un des principaux thèmes de la répétition d'un jeu est qu'une menace / promesse future *crédible* peut avoir une influence sur le comportement présent. La répétition du jeu peut donc changer l'équilibre du jeu. On montrera par exemple comment et dans quelles conditions la répétition du jeu du *free riding* (aléa moral) favorise t-elle la coopération entre les joueurs.

Pour faire ressortir ces implications, nous commencerons par le cas d'un jeu répété deux fois, puis nous aborderons le cas d'un jeu infiniment répété. Notons par $G(T)$, le jeu simultané G répété T fois et où l'issue de toutes les étapes passées est observée par les joueurs avant le déroulement de n'importe quelle étape. De même, notons par $G(\infty, \delta)$, le jeu $G(T)$ avec $T \to \infty$ et où les joueurs ont en commun le facteur d'actualisation subjectif δ. Avec $r > 0$ représentant le taux d'intérêt subjectif, on a $\delta = \frac{1}{1+r}$. Le facteur d'actualisation subjectif représente donc l'impatience de la consommation des individus, c'est-à-dire la préférence des individus pour la consommation présente à la consommation future.

3.4.1. Jeux répétés deux fois

Soit le jeu sous forme normale de la figure 3.11 du type du dilemme du prisonnier.[54] Ce jeu admet un seul équilibre de Nash en stratégies pures (en stratégies strictement dominantes), soit (Avouer, Avouer) et le paiement des deux joueurs est (3; 3).

[54] Il s'agit du jeu représenté dans la figure 1.1 en ayant rajouté 8 à chaque paiement. L'objectif recherché est seulement d'obtenir une présentation plus commode avec des nombres non négatifs. On peut aisément montrer que l'équilibre d'un jeu ne change pas lorsqu'on rajoute le même scalaire identiquement à tous les paiements d'un jeu.

Prisonnier 2

		Ne pas avouer	Avouer
Prisonnier 1	Ne pas avouer	6 , 6	0 , 7
	Avouer	7 , 0	3 , 3

Figure 3.11

Considérons maintenant que ce jeu est joué une deuxième fois par les mêmes joueurs qui auront préalablement observé le résultat de la première issue du jeu.

Pour déterminer l'équilibre parfait, on suivra la procédure de Récurrence vers l'amont (*Backwards Induction*). On détermine en premier lieu l'équilibre de la deuxième étape et son résultat sera intégré au jeu de la première étape. Les deux joueurs anticipant le résultat de la seconde étape, soit (Avouer, Avouer) avec un paiement pour les deux joueurs égal à (3, 3), le dilemme du prisonnier joué 2 fois revient au jeu suivant joué une seule fois :

Prisonnier 2

		Ne pas avouer	Avouer
Prisonnier 1	Ne pas avouer	9 , 9	3 , 10
	Avouer	10 , 3	6 , 6

Figure 3.12

Les éléments de la matrice des paiements de ce jeu sont les éléments de la matrice des paiements du jeu du dilemme du prisonnier auxquels on rajoute les paiements (3, 3), résultat de l'équilibre de Nash de la seconde étape (on néglige ici l'actualisation des paiements futurs). Ce dernier jeu admet un seul équilibre de Nash, soit le profil de stratégies (Avouer, Avouer) avec un paiement pour les deux joueurs égal à (6, 6). Ainsi, l'unique équilibre parfait du dilemme du prisonnier joué deux fois est le profil de stratégies (Avouer, Avouer) à la première et à la seconde étapes.

Proposition : Si le jeu G admet un équilibre de Nash unique, alors pour tout T fini, le jeu $G(T)$ admet un seul équilibre parfait : l'équilibre de Nash du jeu G est joué à chaque séquence.

L'exemple du dilemme du prisonnier répété deux fois présente la caractéristique particulière selon laquelle le jeu n'admet qu'un seul équilibre de Nash en stratégies pures. L'implication de cette dernière est que le jeu répété 2 (ou T) fois n'admet qu'un seul équilibre parfait dans lequel l'équilibre de Nash du jeu est répété 2 (ou T) fois.

3.4.2. Jeux infiniment répétés

Comme pour les jeux répétés un nombre fini de fois, dans la classe des jeux infiniment répétés, une importance capitale est accordée au thème de la crédibilité des menaces/promesses et leur influence sur le comportement présent. Un résultat important est obtenu dans le cas d'un jeu infiniment répété $G(\infty,\delta)$. En effet, dans cette classe de jeu, lorsque le jeu G a un équilibre de Nash unique, le jeu $G(\infty,\delta)$ peut avoir un équilibre de Nash parfait où à aucune étape du jeu, l'équilibre de Nash du jeu G n'est joué.

A titre d'illustration, considérons le jeu de *free riding* (aléa moral) du chapitre 1 dans lequel chacun des deux joueurs a le choix entre travailler et ne pas travailler (tricher). Rappelons que la matrice des paiements de ce jeu est la suivante :

		Joueur 2	
		Travailler	Tricher
Joueur 1	Travailler	1 , 1	-1 , 2
	Tricher	2 , -1	0 , 0

Figure 3.13

Considérons que ce jeu soit répété un nombre infini de fois et qu'il soit à information parfaite, c'est-à-dire qu'avant de jouer à la $t^{\text{ème}}$ étape, les deux joueurs observent (et gardent en mémoire) le résultat de toutes les (t-1) étapes précédentes.

En appelant π_t le paiement reçu à l'étape t et $\delta < 1$ le facteur d'actualisation subjectif, supposé constant et commun aux deux joueurs, la valeur actuelle des paiements d'un jeu infiniment répété est :

$$\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\pi_t$$

Nous montrons que dans ce jeu répété infiniment, la coopération entre les joueurs à toutes les étapes du jeu peut être la solution optimale. En d'autres termes, bien que (Tricher, Tricher) soit l'unique équilibre de Nash du jeu joué une seule fois, les joueurs peuvent choisir (Travailler, Travailler) à toutes les étapes du jeu infiniment répété. Ce résultat se base sur l'idée selon laquelle si les joueurs jouent la coopération aujourd'hui, alors les équilibres futurs procureront des paiements élevés. Sinon, les équilibres futurs procureront des paiements futurs plus faibles. Considérons pour cela la stratégie suivante du joueur *i* :

> *Jouer « Travailler » à la première étape. A l'étape t, jouer encore « Travailler » si le résultat des (t-1) précédentes étapes est (Travailler, Travailler). Sinon jouer « Tricher ».*

Cette stratégie est un exemple de stratégie de coopération (*trigger strategy*).[55] Le joueur *i* coopère jusqu'à ce qu'il constate que l'autre joueur ne coopère plus. Si les deux joueurs adoptent cette stratégie, alors ils recevront un paiement égal à 1 à toutes les étapes du jeu infiniment répété. Nous montrons que, à la condition que le facteur d'actualisation δ soit suffisamment proche de 1, jouer la stratégie de coopération par les deux joueurs constitue un équilibre de Nash du jeu infiniment répété. De plus, cet équilibre de Nash est parfait (Subgame-perfect).

Pour montrer que la stratégie de coopération (*trigger strategy*) est un équilibre de Nash, supposons que le joueur 2 a adopté cette stratégie de coopération. Nous montrons alors que (à la condition que le facteur d'actualisation δ soit suffisamment proche de 1), la meilleure réponse du joueur 1 est d'adopter lui également cette stratégie. Etant donné que le joueur 2 choisit de coopérer, si le joueur 1 accepte de coopérer, il recevra un paiement égal à 1 à toutes les étapes du jeu infiniment répété.

[55] Appelée également stratégie de déclic.

La valeur actuelle de ces paiements est :

$$V_c = 1 + 1 \times \delta + 1 \times \delta^2 + \cdots = \left(1 + \delta + \delta^2 + \cdots\right) = \frac{1}{1-\delta}$$

L'autre possibilité est la déviation vers la non coopération. Considérons que cette déviation commence dès la première étape.[56] Dans cette alternative, le joueur 1 joue Tricher, ce qui lui donne un paiement égal à 2, car l'issue est (Tricher, Travailler). L'issue de cette première phase étant différente de (Travailler, Travailler), le joueur 2, conformément à la stratégie de coopération, jouera Tricher à toutes les étapes futures. La meilleure réponse du joueur 1 est dans ce cas Tricher, ce qui lui donne un paiement de 0 à la deuxième étape et à toutes les étapes à venir. Ainsi, en choisissant de ne pas coopérer, le joueur 1 obtient un paiement de 2 à la première phase et un paiement de 0 pour toute la durée restante (infinie) du jeu. La valeur actuelle de ces paiements est :

$$V_{nc} = 2 + 0 \cdot \delta + 0 \cdot \delta^2 + \cdots = 2$$

Ainsi, étant donné que le joueur 2 adopte la stratégie de coopération, la meilleure réponse du joueur 1 est également la stratégie de coopération si et seulement si $V_c > V_{nc}$, soit si $\frac{1}{1-\delta} > 2$. Cette condition implique $\delta > \frac{1}{2}$, soit $r < 1$.

Ainsi, choisir Travailler à la première phase et également à toutes les phases ultérieures (à la condition d'avoir observé (Travailler, Travailler) lors des étapes précédentes est la meilleure réponse du joueur 1 à la stratégie de coopération du joueur 2 si et seulement si $\delta > \frac{1}{2}$. La même démarche s'applique au joueur 2. En conclusion, l'issue (Travailler, Travailler) à toutes les phases du jeu est un équilibre de Nash du jeu infiniment répété si et seulement si $\delta > \frac{1}{2}$.

La stratégie de coopération consiste pour chaque joueur à prendre l'initiative de la coopération et poursuivre la coopération si l'autre joueur a également fait le premier pas de la coopération. Cette initiative comporte une menace crédible de retourner à la non coopération si l'autre joueur n'a pas pris l'initiative de la coopération. La crédibilité de cette menace provient du fait que la non coopération pour le jeu statique *G* est un équilibre de Nash.

Chacun des deux joueurs dispose donc de deux alternatives (coopérer et ne pas coopérer) représentant deux séries de revenus (utilités) futurs infinis. Pour les comparer, considérons la différence de revenus (utilités) de la troisième alternative (fictive) représentant la différence "Coopérer – Ne pas coopérer" telle qu'elle apparaît dans la figure ci-dessous :

[56] On peut montrer que le résultat ne change pas si la déviation apparaît à une étape ultérieure.

$t =$	0	1	2	3	…
Coopérer	1	1	1	1	…
Ne pas coopérer	2	0	0	0	…
"Coopérer – Ne pas coopérer"	-1	+1	+1	+1	…

Figure 3.14

La valeur Actuelle Nette de cette troisième alternative (fictive) est égale à $-1+\frac{1}{r}$. De ce fait, la coopération, soit l'issue (travailler, travailler) à toutes les étapes devient préférable pour les deux joueurs si $-1+\frac{1}{r}>0$, c'est-à-dire si $r<1$. Un taux d'intérêt subjectif faible (en fait ici inférieur à 1) signifiant une plus forte préférence pour la consommation future, la stratégie de coopération est un équilibre de Nash lorsque l'impatience pour la consommation présente est faible.

En d'autres termes, si le joueur 1 dévie de la coopération sachant que le joueur 2 a choisi la coopération, alors il obtient un gain net de 1 à la première étape du jeu et une perte nette de 1 à chacune des étapes futures du jeu. Cette déviation n'est profitable que si $\delta<\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si $r>1$. A ce taux (supérieur à 100%), l'individu obtient un gain net de 1 à la première étape qu'il peut investir à perpétuité, ce qui lui permet de gagner plus de 1 à chaque étape future, compensant ainsi la perte nette de 1 résultant de la déviation.

On a montré que la stratégie de coopération dans un jeu infiniment répété est un équilibre de Nash. Il s'agit ici d'une variante du résultat suivant : Une *menace* / *promesse* crédible concernant un comportement futur peut influencer le comportement présent. Nous devons maintenant nous assurer que la stratégie de coopération est bien un équilibre de Nash parfait (Subgame-Perfect Nash Equilibrium – SPNE). Nous devons donc nous assurer que cette stratégie respecte le principe de rationalité séquentielle, principe selon lequel un équilibre de Nash doit spécifier un comportement optimal à n'importe quel point du jeu. Nous devons donc montrer que tous les sous-jeux de cette stratégie sont également des équilibres de Nash.

La figure suivante montre que dans le jeu infiniment répété étudié, tout sous-jeu est identique au jeu infiniment répété. Elle montre également que les sous-jeux peuvent être classés en deux groupes :

- Le premier groupe est constitué de tous les sous-jeux dont les résultats des phases précédentes sont tous (Travailler, Travailler) ;
- Le second groupe est constitué de tous les sous-jeux dont au moins un des résultats précédents diffère de (Travailler, Travailler).

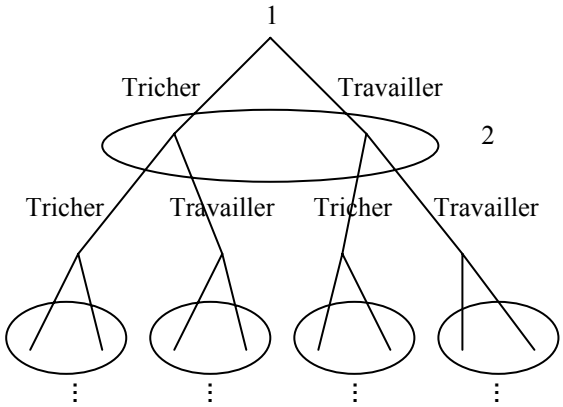


Figure 3.15

Si les deux joueurs adoptent la stratégie de coopération dans le jeu infiniment répété, alors :

- Dans les sous-jeux du premier groupe, la stratégie des deux joueurs est également la stratégie de coopération qui, comme on l'a montré, est un équilibre de Nash (à la condition que $\delta > \frac{1}{2}$) ;
- Dans les sous-jeux de la seconde catégorie, les deux joueurs vont répéter infiniment (Tricher, Tricher), qui constitue également un équilibre de Nash.

Ainsi, la stratégie de coopération est un équilibre de Nash parfait du jeu de *free riding* répété infiniment.

Comme souligné plus haut, le jeu de *free riding* (aléa moral) est un cas du modèle du dilemme du prisonnier dont la représentation générale est, avec $\lambda < \beta < \alpha < \gamma$.

		Joueur 2	
		Travailler	Tricher
Joueur 1	Travailler	α , α	λ , γ
	tricher	γ , λ	β , β

Figure 3.12

Dans ce cas, on a $V_c = \alpha + \alpha\delta + \alpha\delta^2 + \cdots = \frac{\alpha}{1-\delta}$ et $V_{nc} = \gamma + \beta\delta + \beta\delta^2 + \cdots = \gamma + \beta\frac{\delta}{1-\delta}$. La condition $V_c > V_{nc}$ s'écrit $\frac{\alpha}{1-\delta} > \gamma + \beta\frac{\delta}{1-\delta}$, ce qui donne $1 > \delta > \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$.

La généralisation de ce résultat a donné lieu au théorème suivant :

<u>Théorème de Friedman (1971)</u> :[57] Soit *G* un jeu fini et statique à information complète. Notons par $(e_1, \cdots, e_n)$ le vecteur des paiements des *n* joueurs correspondant à l'équilibre de Nash du jeu *G* et $(x_1, \cdots, x_n)$ un vecteur quelconque des paiements des *n* joueurs appartenant à

[57] Friedman, J. (1971). "A non-cooperative Equilibrium for Supergames". *Review of Economic Studies*. Vol. 38. P 1-12.

l'ensemble des paiements réalisables du jeu *G*. Si $x_i > e_i$ pour tout joueur *i*, et si le facteur d'actualisation δ est suffisamment proche de 1, alors il existe un équilibre de Nash parfait (*Subgame Perfect Nash Equilibrium* –SPNE) du jeu infiniment répété $G(\infty, \delta)$ qui permet d'obtenir le vecteur $(x_1, \cdots, x_n)$ comme paiements moyens des *n* joueurs.[58]

3.4.3. Application : la collusion dans un duopole en quantité

Reconsidérons le modèle de duopole de Cournot avec les données simplifiées suivantes :

- La quantité totale est $Q = q_1 + q_2$
- Le prix de marché est $P(Q) = a - Q$ avec $Q < a$
- Le coût unitaire de production est *c*, commun aux deux firmes.

On a ainsi $\pi_i = q_i \cdot (P - c) = q_i \cdot (a - q_1 - q_2 - c)$ pour $i = 1, 2$

Nous avons vu que dans le modèle de duopole de Cournot, à l'équilibre de Nash, la quantité offerte par chacune des 2 firmes est $q_1 = q_2 = q_C = \frac{a-c}{3}$. La quantité totale est dans ce cas $Q_C = \frac{2(a-c)}{3}$, supérieure à la quantité totale en cas de monopole $Q_m = \frac{a-c}{2}$. Le profit du monopole est $\pi_m = Q_m \cdot (a - Q_m - c)$. Il est maximum lorsque $\frac{d\pi_m}{dQ_m} = a - 2Q_m - c = 0$, soit lorsque $Q_m = \frac{a-c}{2}$.

Etant donné que $Q_C > Q_m$, chacune des deux firmes peut obtenir un profit plus élevé si elle pouvait produire la moitié de la quantité de monopole $\frac{Q_m}{2} = \frac{a-c}{4}$ au lieu de la quantité de Cournot $q_C = \frac{a-c}{3}$. (En cas de quantité $\frac{Q_m}{2}$, le profit de l'entreprise est $\frac{(a-c)^2}{8}$ et en cas de quantité Q_C, il est de $\frac{(a-c)^2}{9}$). On montre que cela est possible avec la répétition du jeu et la collusion entre les deux firmes.

Considérons pour cela le jeu du duopole de Cournot infiniment répété où à chaque étape, les deux firmes observent le résultat de toutes les étapes précédentes. L'objectif est de déterminer les valeurs du facteur d'actualisation subjectif δ, commun aux deux entreprises, pour lesquelles la stratégie suivante des deux firmes en situation de duopole constitue un équilibre de Nash parfait :

> *Produire la moitié de la quantité totale de monopole* $\frac{Q_m}{2}$ *à la première période. A la période t, produire* $\frac{Q_m}{2}$ *si chacune des 2 firmes a produit la quantité* $\frac{Q_m}{2}$ *à chacune des (t-1) précédentes périodes. Sinon, produire la quantité de Cournot* q_C.

[58] Voir également la notion de Folk theorem. Tirole J (1988). Page 268.

Lorsque chacune des deux firmes produit la moitié de la quantité de monopole $\frac{Q_m}{2} = \frac{a-c}{4}$, elle obtient un profit noté $\frac{\pi_m}{2}$ égal à :

$$\frac{\pi_m}{2} = (P_m - c)\frac{Q_m}{2} = ((a - Q_m) - c)\left(\frac{a-c}{4}\right) = \left(\left(a - \frac{a-c}{2}\right) - c\right)\left(\frac{a-c}{4}\right) = \frac{(a-c)^2}{8}$$

Nous avons déjà vu que, lorsque chacune des deux firmes produit la quantité de Cournot, elles obtiennent chacune un profit égal à $\pi_C = \frac{(a-c)^2}{9}$.

Déterminons maintenant le profit que peut obtenir la firme *j* si elle déviait de la moitié de la quantité de monopole $\frac{Q_m}{2}$ sachant que l'autre firme choisit de produire $\frac{Q_m}{2}$. Etant donné que quelque soit le niveau de cette déviation, l'autre firme aura toujours la même réaction, c'est-à-dire revenir à la quantité de Cournot, la firme *j* choisit la déviation qui maximise son profit, c'est-à-dire la quantité qui satisfait le programme suivant :

$$\underset{q_j}{Max}\left(a - q_j - \frac{1}{2}Q_m - c\right)q_j$$

La solution est $q_j = \frac{3(a-c)}{8}$ et le profit résultant de cette déviation est :

$$\pi_d = \left(a - \left(\frac{3(a-c)}{8} + \frac{a-c}{4}\right) - c\right)\left(\frac{3(a-c)}{8}\right) = \frac{9(a-c)^2}{64}$$

Ainsi, choisir la collusion (*trigger strategy*) est un équilibre de Nash si et seulement si $\pi_d + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_C < \frac{1}{2}\pi_m \frac{1}{1-\delta}$, soit si et seulement si :

$$\frac{9(a-c)^2}{64} + \frac{\delta}{1-\delta}\frac{(a-c)^2}{9} < \frac{(a-c)^2}{8}\frac{1}{1-\delta}$$

Ce qui donne $\delta > \frac{9}{17}$, soit $r < \frac{8}{9} \approx 0{,}9$.

En suivant la même démarche que dans le cas du dilemme du prisonnier infiniment répété, on montre que la collusion est un équilibre de Nash parfait, car elle constitue un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux.

Chapitre 4 : Jeux simultanés à information incomplète

Dans la classe des jeux statiques (simultanés) en information complète étudiée au chapitre 1, les fonctions de paiement de tous les joueurs sont une information commune. Chaque joueur connaît la fonction de paiement de tous les autres joueurs et sait que tous ces autres joueurs savent qu'il connaît leur fonction de paiement. Dans le présent chapitre, nous introduisons la possibilité qu'au moins un des joueurs soit face à une incertitude concernant la fonction de paiement des autres joueurs. Nous abordons ainsi la classe des jeux statiques en information incomplète appelés jeux bayésiens. Dans cette classe de jeu, l'information privée détenue par le joueur i et non observée par les autres joueurs est appelée le type du joueur i.

Un des exemples classiques de jeux en information incomplète est le mécanisme des enchères. Dans l'enchère sous pli cacheté, chaque joueur (enchérisseur) connaît sa propre évaluation pour l'objet en vente mais ne connaît pas l'évaluation pour l'objet des autres enchérisseurs (joueurs)[59]. Les enchères étant faites sous pli cacheté, aucun des enchérisseurs ne connaît l'offre des autres joueurs. Les choix des enchérisseurs peuvent donc être considérés comme étant simultanés. De ce fait, l'enchère sous pli cacheté est typiquement un jeu statique (simultané) en information incomplète.

Ce chapitre est organisé comme suit :

- Exemples de jeux bayésiens : jeu de *free riding* et duopole de Cournot avec asymétrie de l'information ;
- La forme normale d'un jeu statique bayésien (jeu statique à information incomplète) ;
- L'équilibre de Nash bayésien ;
- Application de jeux statiques bayésiens : Le modèle de Cournot selon la démarche de Harsanyi.[60]

4.1. Exemples de jeux bayésiens : jeu de free riding et duopole de Cournot avec asymétrie de l'information

Dans ce chapitre, nous abordons les jeux à information incomplète, c'est à dire les jeux où au moins un joueur *i* a une caractéristique pertinente pour le jeu qui est son information privée. Cette caractéristique, symbolisée par t_i, n'est pas observable par les autres joueurs.

Les deux exemples de cette section font ressortir trois caractéristiques importantes des jeux statiques en information incomplète :

- Le joueur *i* a une information privée t_i qu'il est le seul à observer. Les autres joueurs ont des *croyances* à propos de cette information privée, croyances représentées par une distribution de probabilité dont le support est t_i.
- La stratégie des joueurs dépend de leur type, ce qui donne l'expression $s_i(t_i)$.
- Le paiement prend la forme d'une espérance de paiement (espérance d'utilité).

[59] Sauf évidemment en cas de collusion entre cet enchérisseur et le vendeur ou des autres acheteurs.
[60] Harsanyi, J. (1995). "Games with Incomplete Information". *The American Economic Review*, Vol. 85, n° 3, June 1995.

A la suite de Harsanyi (1967-1968), on considère que la caractéristique t_i est la réalisation d'une variable aléatoire et représente le résultat du mouvement d'un nouvel agent (fictif), la Nature.[61] Pour cette approche des jeux statiques à information incomplète, on considère que la Nature joue en premier lieu en procédant au tirage aléatoire du type $t_i \in T_i$ du joueur *i*. La valeur de t_i est révélée (observée) seulement au (par le) joueur *i* qui devient donc son information privée. Les autres joueurs n'observent pas t_i.

La démarche proposée par Harsanyi consiste donc à interpréter un jeu statique à information incomplète en un jeu dynamique à information imparfaite.[62] De plus, les croyances des joueurs étant révisées après le mouvement de la nature par application de la formule de Bayes, les jeux de cette classe sont également appelés jeux bayésiens.

4.1.1. Jeu de free riding avec asymétrie de l'information

Pour illustrer cette réinterprétation du jeu statique en information incomplète en un jeu dynamique en information imparfaite, reprenons l'exemple du *free riding*. Supposons d'abord que le joueur 1 ressente un coût psychologique de 2 en équivalent monétaire s'il venait à ne pas travailler sachant que le joueur 2 a travaillé. L'existence de ce coût psychologique pour le joueur 1 est connaissance commune du jeu, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune asymétrie d'information concernant le coût psychologique du joueur 1.[63]

L'asymétrie d'information que nous introduisons dans le modèle de *free riding* porte sur *l'incertitude* qu'a l'individu 1 concernant les préférences de l'individu 2. Cette incertitude concerne l'existence d'un coût psychologique que pourrait ressentir l'individu 2 s'il venait à ne pas travailler. L'incertitude qu'a l'individu 1 à propos des préférences de l'individu 2 donne lieu à des croyances qui prennent la forme d'une distribution de probabilité. C'est ainsi que pour l'individu 1 :

- Avec probabilité α, l'individu 2 ne ressent aucun coût psychologique à ne pas travailler. Dans ce cas, la matrice des gains du jeu est la suivante :

Joueur 2

		Travailler	Ne pas travailler
Joueur 1	Travailler	1 ; 1	-1 ; 2
	Ne pas travailler	0 ; -1	0 ; 0

Figure 4.1a

- Avec probabilité $(1-\alpha)$, l'individu 2 ressent un coût psychologique de 2 en équivalent monétaire s'il ne travaille pas. Dans ce cas, la matrice des gains du jeu est la suivante :

[61] Harsanyi, John. « Games with Incomplete Information Played by « Bayesian Players ». Management Science, I, II et III. 1967, 1968.
[62] Rappelons que l'information est imparfaite lorsque le joueur ne connaît pas toute l'histoire du jeu.
[63] Ce modèle est une variante du modèle du dilemme du prisonnier avec incertitude sur les préférences. Voir Mas-Colell, Whinston & Green (1995).

Joueur 2

		Travailler	Ne pas travailler
Joueur 1	Travailler	1 ; 1	-1 ; 0
	Ne pas travailler	0 ; -1	0 ; -2

Figure 4.1b

Suivant la démarche de Harsanyi, ce jeu statique à information incomplète peut être interprété comme étant un jeu dynamique à information imparfaite. Ainsi, la première étape (premier mouvement) du jeu est réalisée par la Nature à qui il revient de choisir par tirage aléatoire du type (I ou II) du joueur 2. Ce mouvement est observé par le joueur 2, c'est-à-dire que ce joueur connaît son type. Mais le joueur 1 n'observe pas le choix de la nature. Tout au plus, il dispose des croyances $(\alpha, 1-\alpha)$ à propos du choix aléatoire de la Nature. L'introduction de la Nature permet de modéliser une situation où le joueur 2 connaît son type (I ou II) et le joueur 1 ne connaît pas le type du joueur 2 mais sait que le joueur 2 peut être du type I avec probabilité α ou du type II avec probabilité $(1-\alpha)$. La représentation de ce jeu sous la forme extensive est la suivante :

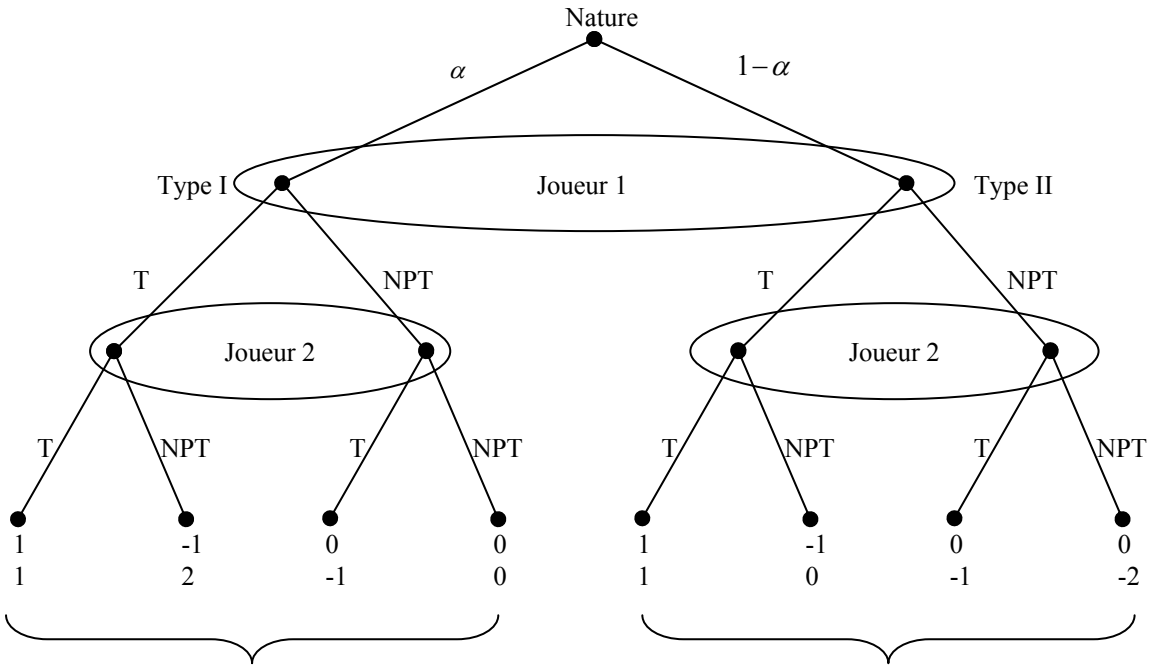


Figure 4.2 a

Joueur 2 (type I)

		T	NPT
Joueur 1	T	1 ; 1	-1 ; 2
	NPT	0 ; -1	0 ; 0

Figure 4.2 b

Joueur 2 (type II)

		T	NPT
Joueur 1	T	1 ; 1	-1 ; 0
	NPT	0 ; -1	0 ; -2

Figure 4.2 c

L'ellipse de haut signifie que le joueur 1 ne connaît pas le résultat du tirage aléatoire de la Nature. La résolution du jeu commence par le joueur 2. Celui-ci connaît son type (observe le choix de la Nature). S'il est du type I, il choisira de ne pas travailler (stratégie strictement dominante) et s'il est du type II, il choisira de travailler (stratégie strictement dominante). En d'autres termes, le choix de la stratégie par le joueur *i* dépend de son type, d'où l'écriture de la

stratégie du joueur *i* sous la forme $s_i(t_i)$. Etant donnés ces choix du joueur 2, la forme extensive du jeu se *réduit* à :

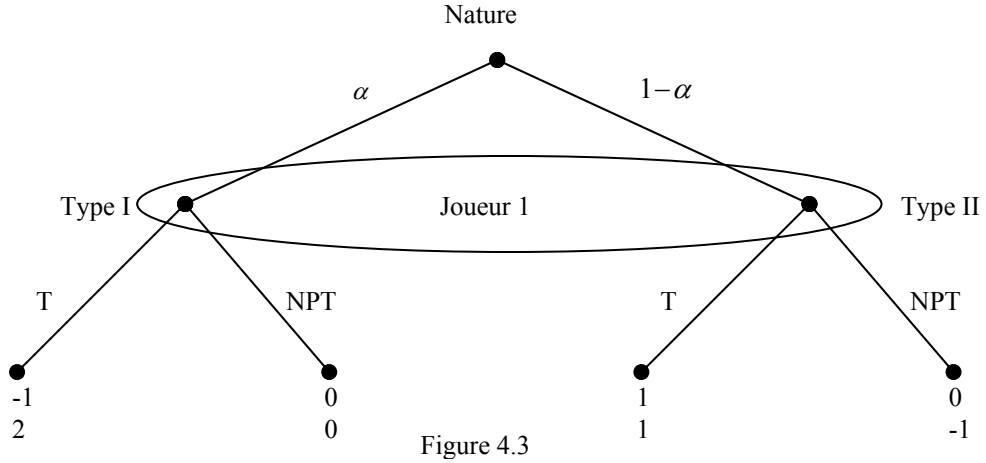


Figure 4.3

Se basant sur ses croyances, le joueur 1 choisit l'action qui maximise son *espérance de paiement*. Le choix de la stratégie "travailler" lui donne une espérance de gain égale à $-1\cdot\alpha+1\cdot(1-\alpha)=1-2\alpha$. Le choix de la stratégie "ne pas travailler" lui donne une espérance de paiement égale à $0\cdot\alpha+0\cdot(1-\alpha)=0$. L'individu choisira de travailler si $1-2\alpha>0$, soit si $\alpha<\frac{1}{2}$ et choisira de ne pas travailler si $1-2\alpha<0$, soit si $\alpha>\frac{1}{2}$. Si $\alpha=\frac{1}{2}$, l'individu 1 sera indifférent entre travailler et ne pas travailler. Remarquons que cette méthode de résolution est similaire à celle de la récurrence vers l'amont. De plus, l'introduction de la Nature revient à considérer comme si chaque type de joueur est un joueur à part entière (player-centred approach). Ici, c'est comme si le joueur 1 avait face à lui deux joueurs différents, le type I du joueur 2 et le type II du joueur 2.

4.1.2. Duopole de Cournot avec asymétrie de l'information

On peut modifier le modèle de duopole de Cournot en introduisant l'asymétrie de l'information en considérant par exemple que la firme 1 a une incertitude quant au coût marginal c_2 de la firme 2. Elle estime que celui-ci peut être égal à c_H (coût élevé) ou c_L (coût faible) avec respectivement les probabilités α et $(1-\alpha)$. Pour la firme 1, la firme 2 peut donc avoir l'une des deux différentes fonctions de paiement (profit) possibles, soit :

$$\pi_2(q_1,q_2;c_H)=q_2\cdot[(a-q_1-q_2)-c_H]$$

ou

$$\pi_2(q_1,q_2;c_L)=q_2\cdot[(a-q_1-q_2)-c_L]$$

La firme 2 connaît la valeur de son coût marginal et donc n'a aucune incertitude sur sa propre fonction de paiement.

On peut par exemple considérer que la firme 2 n'a aucune incertitude quand à c_1, la valeur du coût marginal de la firme 1.[64] Par conséquence, pour la firme 2, la fonction de paiement de la firme 1 demeure inchangée, soit :

$$\pi_1(q_1, q_2; c_1) = q_1 \cdot [(a - q_1 - q_2) - c_1]$$

On dira que l'espace des types de la firme 2 est $T_2 = \{c_L\ , c_H\}$ et l'espace des types de la firme 1 est $T_1 = \{c_1\}$.

A titre de simplification, considérons que $t_1 = a - c_1 = 1$, c'est à dire qu'il n'existe aucune incertitude relative au coût c_1 de la firme 1.[65] En d'autres termes, la firme 2 dispose d'une information complète sur la firme 1. Par contre, la firme 1 n'est pas certaine de la valeur de $t_2 = a - c_2$ de la firme 2, c'est à dire du coût c_2 de la firme 2. Elle a seulement des croyances *a posteriori* sur t_2 résumées dans les probabilités suivantes : $P\left(t_2 = \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$ et $P\left(t_2 = \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Lorsque $t_2 = \frac{3}{4}$, la firme 2 est dite du type c_H (coût élevé) et lorsque $\theta_2 = \frac{5}{4}$, la firme 2 est dite du type c_L (coût faible).[66]

Le duopole ainsi décrit est un jeu bayésien à deux joueurs. L'équilibre de Nash bayésien est le vecteur de stratégies $\left(q_1^*, q_2^{H*}, q_2^{L*}\right)$ où q_1^* est la quantité optimale choisie par la firme 1, q_2^{H*} la quantité optimale choisie par la firme 2 lorsque celle-ci est du type c_H et q_2^{L*} la quantité optimale choisie par la firme 2 lorsque celle-ci est du type c_L.

La firme 2 choisit une quantité optimale en fonction de son type (c_H ou c_L), ce qui s'exprime par la fonction $q_2^*(t_2)$. Cette quantité satisfait le programme de maximisation suivant :

$$\underset{q_2}{Max}\ \pi_2 = q_2 \cdot (t_2 - (q_1 + q_2))$$

La condition du premier ordre, nécessaire et suffisante, de ce programme implique que :[67]

$$q_2^*(t_2) = \frac{t_2 - q_1}{2}$$

Cette condition d'équilibre s'écrit également comme suit :

---

[64] L'application de la section 4.4 considèrera que les deux firmes ont une incertitude à propos des coûts du concurrent.

[65] Voir Fudenberg D. et Tirole J (1991.

[66] Nous verrons plus loin que les probabilités *a posteriori* sont le résultat d'une révision bayésienne des probabilités *a priori*.

[67] On a en effet $\frac{d^2\pi_2}{d\,q_2^{\ 2}} = -2 < 0$.

$$q_2^{H*} = \frac{3/4 - q_1}{2} \text{ et } q_2^{L*} = \frac{5/4 - q_1}{2}$$

La firme 1 choisit la quantité optimale q_1^* en fonction de ses *croyances* sur la valeur de t_2, c'est à dire celle qui maximise son espérance de profit, soit :

$$\underset{q_1}{Max} \;\; \pi_1 = \frac{1}{2}\left[q_1 \cdot \left(1 - \left(q_1 + q_2^H\right)\right)\right] + \frac{1}{2}\left[q_1 \cdot \left(1 - \left(q_1 + q_2^L\right)\right)\right]$$

La condition du premier ordre, nécessaire et suffisante, de ce programme implique que :

$$q_1^* = \frac{2 - \left(q_2^H + q_2^L\right)}{4}$$

L'équilibre de Nash bayésien du jeu s'obtient par la combinaison des trois conditions d'équilibre, soit :

$$q_1^* = \frac{2 - \left(q_2^{H*} + q_2^{L*}\right)}{4} = \frac{2 - \left(\frac{3/4 - q_1^*}{2} + \frac{5/4 - q_1^*}{2}\right)}{4}$$

$$q_1^* = \frac{1}{3}$$

Ceci implique que :

$$q_2^{H*} = \frac{3/4 - q_1^*}{2} = \frac{5}{24}$$

$$q_2^{L*} = \frac{5/4 - q_1^*}{2} = \frac{11}{24}$$

L'équilibre bayésien est donc le vecteur de stratégies suivantes : $\left(q_1^*, q_2^{H*}, q_2^{L*}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{24}, \frac{11}{24}\right)$.

Ces deux exemples permettent de faire ressortir les principaux éléments suivants des jeux bayésiens:

- La démarche proposée par Harsanyi consiste à introduire un joueur *fictif*, la Nature, qui joue en premier en affectant à chaque joueur son type après un tirage aléatoire. L'introduction de la Nature et de la procédure du tirage aléatoire permettent de formaliser l'asymétrie de l'information et les croyances des joueurs ;
- Le type du joueur *i* n'est observé que par le joueur *i*. Les autres joueurs ont des croyances sur le type du joueur *i*, représentées par une distribution de probabilité ;
- Le joueur *i* choisit sa stratégie en fonction de son type, ce qui donne la fonction $s_i(t_i)$;

- Le joueur de type t_i choisit la stratégie qui maximise son espérance d'utilité (de gain), l'espérance étant calculée sur la base de ses croyances sur le type des autres joueurs.

4.2. La forme normale d'un jeu statique à information incomplète

Dans cette section, nous présentons formellement la démarche introduite par Harsanyi (1967-1968) et qui consiste à considérer que la caractéristique t_i est la réalisation d'une variable aléatoire et représente le résultat du mouvement d'un nouvel agent, la Nature. Cette approche des jeux statiques à information incomplète consiste à considérer que la Nature joue en premier lieu et procède au tirage aléatoire du type $t_i \in T_i$ du joueur *i*. La valeur de t_i est révélée (observée) seulement au (par) le joueur *i* qui devient donc son information privée. Les autres joueurs n'observent pas t_i. Avec cette approche, on définit un jeu bayésien dont le timing est le suivant :

1. Il existe, *avant* tout début de jeu, une fonction de distribution (croyances) *a priori* $F(t)$ donnant les probabilités jointes des types $t = (t_1, \cdots, t_n)$. Cette distribution *a priori* est connaissance commune à tous les joueurs ;
2. Le jeu commence par le mouvement de la Nature qui procède au tirage aléatoire du vecteur $t = (t_1, \cdots, t_n)$ distribué selon $F(t)$;
3. La Nature révèle le type t_i au seul joueur *i* ;
4. Connaissant $F(t)$ et t_i, chaque joueur *i* peut en déduire des croyances *a posteriori* $f_i(t_{-i} / t_i)$ sur la valeur t_{-i} du type des autres joueurs.
5. Chaque joueur choisit une stratégie de son espace S_i. Ce choix se fait en fonction du type t_i révélé par la Nature, d'où l'on peut écrire $s_i(t_i)$.
6. Chaque joueur *i* reçoit un paiement qui dépend non seulement du profil de stratégies pures $s = (s_1, \cdots, s_n)$, mais également de sa caractéristique privée $t_i \in T_i$. Elle prend donc la forme de l'espérance d'utilité $\underset{t_{-i}}{E}[u_i(s_i, s_{-i}; t_i)]$.[68]

Remarquons que l'hypothèse selon laquelle la distribution jointe *a priori* $F(t)$ est connaissance commune est une hypothèse forte. Elle est à la base de l'existence des probabilités subjectives (*a posteriori*) $f_i(t_{-i} / t_i)$.

En introduisant un joueur fictif, la Nature, une situation de jeu statique à information incomplète est réinterprétée comme étant un jeu dynamique à information imparfaite. En effet, lorsque la nature choisit (tire de façon aléatoire) la caractéristique (type) t_i, les autres joueurs $-i$ ne peuvent observer ce choix. Ils ne connaissent donc pas la totalité de l'histoire du jeu. Cette extension du jeu par sa transformation en un jeu en information imparfaite permet d'appliquer la technique standard de la théorie des jeux, notamment le concept de

[68] Cette approche est qualifiée de *player-centered*. Voir J. Harsanyi, "games with incomplete information". *The American Economic Review*. Vol 85, n° 3; June 1995. L'autre approche équivalente est la type-centred interprétation développée à la section 4.3.

l'équilibre de Nash, sous réserve d'une nouvelle définition des concepts de stratégies et de paiements.

Pour déterminer l'espérance de paiement liée au choix d'une stratégie, les joueurs doivent spécifier les probabilités $f_i(t_{-i}/t_i)$, ce qui nécessite le recours à la formule de Bayes. Dans l'approche de Harsanyi, connaissant son type t_i et la distribution jointe $F(t)$, chaque joueur peut estimer la probabilité des types t_{-i} des autres joueurs en se référant à la formule de Bayes :

$$P(t_{-i}/t_i) = \frac{P(t_{-i},t_i)}{P(t_i)} = \frac{P(t_{-i},t_i)}{\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} P(t_{-i},t_i)}$$

La formule de Bayes permet de *réviser* les probabilités (croyances) après avoir observé un évènement donné. Pour expliciter cette formule (de Bayes), on utilise le schéma suivant qui représente deux ensembles (évènements) *A* et *B* non disjoints.

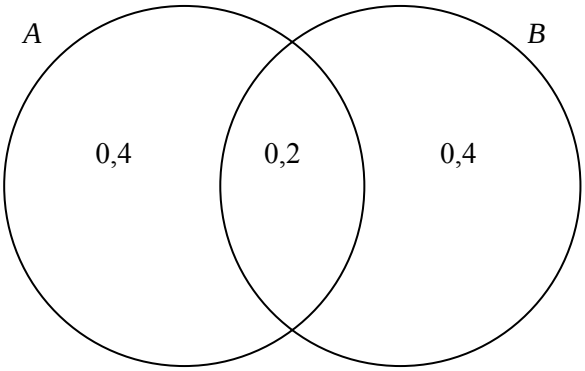


Figure 4.4

Etant donné que $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}6$ et $P(A\cap B)=0{,}2$, on a $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}2}{0{,}6}=\frac{1}{3}$.

Joueur 2

Joueur 1	t_1 \ t_2	3	8	Probabilités marginales
	5	0,2	0,4	$P(t_1=5)=0{,}6$
	6	0,3	0,1	$P(t_1=6)=0{,}4$
	Probabilités marginales	$P(t_2=3)=0{,}5$	$P(t_2=8)=0{,}5$	

Figure 4.5

Pour illustrer le calcul des probabilités *a posteriori*, c'est-à-dire le processus de révision des probabilités, considérons par exemple la matrice de la figure 4.5 donnant les *probabilités*

jointes (probabilités *a priori*) de t_1 et t_2. Dans l'approche de Harsanyi, ces probabilités jointes sont *connaissance commune* aux joueurs.

A la première étape du jeu, la Nature procède au tirage aléatoire des types des joueurs et révèle à chaque joueur *i* son type t_i. Supposons que dans notre cas, la Nature tire le type 5 du joueur informe le joueur 1 et le type 8 du joueur 2. Par la suite, chaque joueur en déduit ses croyances révisées (probabilités *a posteriori*) en utilisant la formule de Bayes, ce qui donne :

Pour le joueur 1 (qui sait qu'il est du type $t_1 = 5$) :

- $P(t_2 = 3 / t_1 = 5) = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \dfrac{1}{3}$
- $P(t_2 = 8 / t_1 = 5) = \dfrac{0{,}4}{0{,}6} = \dfrac{2}{3}$

Pour le joueur 2 (qui sait qu'il est du type $t_2 = 8$) :

- $P(t_1 = 5 / t_2 = 8) = \dfrac{0{,}4}{0{,}5} = \dfrac{4}{5}$
- $P(t_1 = 6 / t_2 = 8) = \dfrac{0{,}1}{0{,}5} = \dfrac{1}{5}$

Dans un jeu simultané (statique) en information incomplète, le joueur *i* connaît son type t_i mais est incertain sur les types $t_{-i} = (t_1, \cdots, t_{i-1}, t_{i+1}, \cdots, t_n)$ des autres joueurs. Avec l'introduction dans le jeu de l'incomplétude de l'information, la fonction de paiement du joueur *i* de type $t_i \in T_i$ est reformulée ainsi : $u_i(s_1, \ldots, s_n, t_i)$. Le joueur *i* dispose de croyances *a posteriori* sur les types t_{-i}, croyances résumées dans la distribution de probabilité $f_i(t_{-i} / t_i)$. Lorsque les types t_i sont indépendants, les distributions de probabilité $f_i(t_{-i} / t_i)$ ne dépendent plus de t_i et dans ce cas, les croyances *a posteriori* du joueur *i* s'écrivent $f_i(t_{-i})$.

Nous obtenons ainsi la définition suivante d'un jeu statique à information incomplète.

Définition : Un jeu statique à information incomplète (jeu bayésien) est la donnée :

- De l'ensemble des joueurs : $i = 1, \cdots, n$;
- Des espaces des stratégies pures des joueurs : $S_1, \cdots, S_n$;
- Des espaces des types des joueurs : $T_1, \cdots, T_n$;
- Des croyances *a posteriori* des joueurs : $f_1, \cdots, f_n$;
- Des fonctions de paiements des joueurs : $u_1, \cdots, u_n$

Avec $f_i = f_i(t_{-i} / t_i)$ et $u_i = u_i(s_1, \cdots, s_n, t_i)$.

Nous dénotons un tel jeu par $G = (S_1, \cdots, S_n \,;\, T_1, \cdots, T_n \,;\, f_1, \cdots, f_n \,;\, u_1, \cdots, u_n)$ ou par $G = (S_1, \cdots, S_n \,;\, u_1, \cdots, u_n \,;\, T \,;\, F(\cdot))$, sachant que $T = T_1 \times \cdots \times T_n$ et que $F(t)$ est la distribution jointe des types $t = (t_1, \cdots, t_n)$.

4.3. L'équilibre de Nash bayésien

La démarche proposée par Harsanyi pour analyser les jeux statiques à information incomplète consiste à considérer ces derniers comme des jeux dynamiques à information imparfaite faisant intervenir un joueur fictif intervenant à la première étape du jeu, la Nature. Pour appliquer le concept de l'équilibre de Nash à un tel jeu, on commence par le mettre sous la forme normale. Cela nécessite l'introduction d'une nouvelle définition de la notion de stratégie qui est en fait similaire à celle introduite pour les jeux dynamiques. Nous obtenons ainsi l'équilibre de Nash bayésien qui est un concept d'équilibre défini pour la classe des jeux simultanés (statiques) à information incomplète.

Comme indiqué par Harsanyi (1995), un jeu à information incomplète peut être analysé en considérant que le centre d'activité est soit le joueur soit les différents types de joueur. Harsanyi qualifie la première approche de *player-centered interpretation* et la seconde de *type-centered interpretation*. En les utilisant de façon appropriée, ces deux approches s'avèrent être équivalentes (voir proposition ci-dessous).[69]

4.3.1. La stratégie dans un jeu bayésien

Rappelons qu'une stratégie est un plan d'actions complet spécifiant les actions possibles du joueur en toute circonstance où il peut avoir à intervenir. Cette définition de la stratégie est en fait similaire à celle des jeux dynamiques. Selon le timing du jeu défini plus haut, à l'étape 2, la Nature révèle à chaque joueur *i* son type t_i. Ainsi, une stratégie (pure) du joueur *i* doit spécifier une action pour chaque type possible que pourrait lui révéler la Nature. Nous obtenons ainsi la définition de la notion de stratégie.

Définition : Dans le jeu bayésien $(S_1,\cdots,S_n\,;u_1,\cdots,u_n\,;T\,;F(\cdot))$, une stratégie pure contingente du joueur *i* est la fonction $s_i(t_i)$ qui, pour chaque type possible $t_i \in T_i$, spécifie une action $s_i \in S_i$ que le joueur *i* choisira si le type t_i venait à être tiré par la Nature.

L'ensemble des stratégies pures contingentes $\widetilde{S}_i$ du joueur *i* est donc l'ensemble de toutes les fonctions $s_i(t_i)$.

Exemple : Si les actions possibles du joueur 1 sont *A* et *B* et ses types possibles sont t_H et t_L, alors l'ensemble de (toutes) ses stratégies $s_1(t_1)$ est :

$$\widetilde{s}_1 : A \text{ si } t_H \text{ et } A \text{ si } t_L\,;$$
$$\widetilde{s}_2 : A \text{ si } t_H \text{ et } B \text{ si } t_L\,;$$
$$\widetilde{s}_3 : B \text{ si } t_H \text{ et } A \text{ si } t_L\,;$$
$$\widetilde{s}_4 : B \text{ si } t_H \text{ et } B \text{ si } t_L\,.$$

[69] J. Harsanyi, J. (1995). “Games with Incomplete Information”. *The American Economic Review*, Vol. 85, n° 3, June 1995.

On a donc $\widetilde{S}_i = (\widetilde{s}_1 ; \widetilde{s}_2 ; \widetilde{s}_3 ; \widetilde{s}_4)$ dont le cardinal est 4. Il peut sembler étrange que la stratégie du joueur *i* soit conditionnelle à son type alors qu'il connaît et observe son type. En fait, cette définition de la notion de stratégie est une conséquence de la définition de l'équilibre de Nash. En effet, pour trouver l'équilibre de Nash, il faut que chaque joueur détermine la stratégie qui soit la meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs. Mais pour qualifier une stratégie de meilleure réponse, chaque joueur doit envisager toutes les stratégies possibles des autres joueurs. Ainsi, même si chaque joueur *i* connaît son type t_i, on doit envisager toutes les valeurs de t_i et les actions qui en dépendent car *c'est la démarche des autres joueurs* quand ils doivent déterminer leur(s) meilleure(s) réponses.

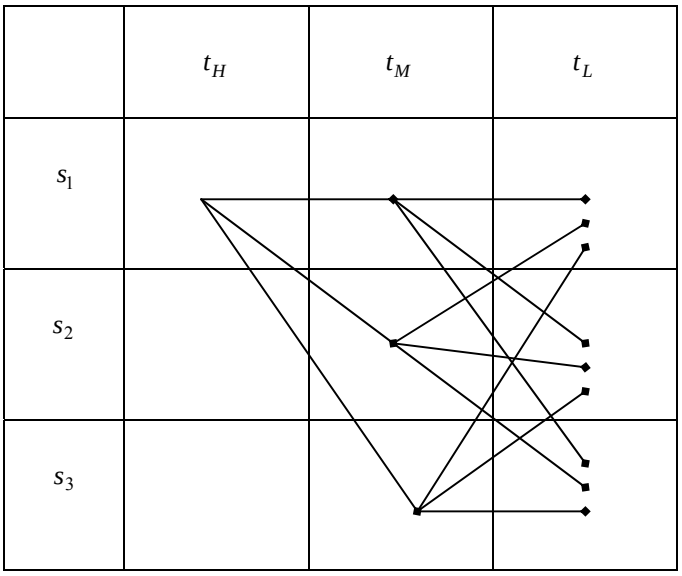


Figure 4.6

Considérons par exemple, le cas du joueur *i* dont l'espace des types est $T_i = (t_H, t_M, t_L)$ et son espace de stratégies $S_i = (s_1, s_2, s_3)$. Comme le montre la figure 4.6, le cardinal de $\widetilde{S}_i$, l'espace des stratégies $s_i(t_i)$ du joueur *i*, est 27. Pour t_H, il existe 3 choix possibles ; s_1, s_2 et s_3. Pour chacun de ces 3 choix, il existe 3 choix possibles pour t_M. Pour chacune de ces 9 combinaisons possibles, il existe 3 choix possibles pour t_L. On obtient un espace de stratégies possibles $s_i(t_i)$ dont le cardinal est de 27.

Nous pouvons d'ores et déjà introduire la distinction entre un *équilibre séparant* (*separating strategy*) et un *équilibre mélangeant* (*pooling strategy*). Dans un équilibre séparant (figure 4.7a), chaque type $t_i \in T_i$ choisit une action différente de S_i. Dans un équilibre mélangeant (figure 4.7b), tous les types $t_i \in T_i$ choisissent la même action $s_i \in S_i$.

t_i / s_i	t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}
s_{i1}		×	
s_{i2}			×
s_{i3}	×		

Exemple d'équilibre séparant

Figure 4.7a

t_i / s_i	t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}
s_{i1}			
s_{i2}	×	×	×
s_{i3}			

Exemple d'équilibre mélangeant

Figure 4.7b

Il est important de remarquer que dans la forme normale d'un jeu, le joueur *i* doit spécifier une action pour chaque type t_i possible et cela même s'il connaît son type. En effet, du fait de l'existence de l'interdépendance stratégique entre les joueurs, le choix du joueur *i* dépend du choix des autres joueurs. Or, ces derniers ignorent le type t_i du joueur *i*. Ils doivent donc considérer toutes les stratégies possibles pour les différents types t_i du joueur *i*. Le jeu doit donc spécifier les stratégies du joueur *i* pour tous les t_i possibles. Cette définition de la stratégie permet d'appliquer le concept de l'équilibre de Nash pour un jeu bayésien, ce qui donne l'équilibre de Nash bayésien.

4.3.2. L'espérance de paiement dans un jeu bayésien

Dans un jeu bayésien, $t_i \in T_i$ est une information privée du joueur *i*. On dit que t_i est le type du joueur *i*. Il est observé uniquement par le joueur *i*. Pour tous les autres joueurs, t_i est une variable aléatoire.

Le paiement du joueur *i* pour le profil de stratégies $s = (s_1(t_1), \cdots, s_n(t_n)) = (s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}))$ prend la forme de l'espérance de paiement :

$$\widetilde{u}_i(s_1(t_1), \cdots, s_n(t_n)) = \underset{t \in T}{E}\left[u_i(s_1(t_1), \cdots, s_n(t_n), t_i)\right] = \sum_{t \in T} u_i(s_1(t_1), \cdots, s_n(t_n), t_i) \cdot P(t)$$

$P(t) = P(t_1, \cdots, t_n)$ est la probabilité jointe de $t = (t_1, \cdots, t_n)$. Le jeu bayésien $(S_1, \cdots, S_n\ ;\ u_1, \cdots, u_n\ ;\ T\ ;\ F(\cdot))$ est ainsi mis sous la forme normale $G = (\widetilde{S}_1, \cdots, \widetilde{S}_n ; \widetilde{u}_1, \cdots, \widetilde{u}_n)$.

4.3.3. L'équilibre de Nash bayésien

Dans le cadre d'un tel jeu, l'équilibre bayésien de Nash est défini comme suit :

Définition: Un équilibre de Nash bayésien pour le jeu bayésien $(S_1, \cdots, S_n\ ;\ u_1, \cdots, u_n\ ;\ T\ ;\ F(\cdot))$ est un profil de stratégies pures $(s_1^*(t_1), \cdots, s_n^*(t_n))$ qui soit un équilibre de Nash du jeu sous forme normale $G = (\widetilde{S}_1, \cdots, \widetilde{S}_n ; \widetilde{u}_1, \cdots, \widetilde{u}_n)$. Le profil de stratégies pures $(s_1^*(t_1), \cdots, s_n^*(t_n))$ est donc un équilibre de Nash bayésien si pour tout $i = 1, ..., n$, on a :

$$\widetilde{u}_i\left(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i})\right) \geq \widetilde{u}_i\left(s_i(t_i), s_{-i}^*(t_{-i})\right) \text{ pour tout } s_i(t_i) \in \widetilde{S}_i$$

Soit si :

$$\sum_t P(t) \cdot u_i\left(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i}), t_i\right) \geq \sum_t P(t) \cdot u_i\left(s_i(t_i), s_{-i}^*(t_{-i}), t_i\right) \text{ pour tout } s_i(t_i) \in \widetilde{S}_i$$

En d'autres termes, le profil de stratégies $\left(s_1^*(t_1), \cdots, s_n^*(t_n)\right)$ est un équilibre de Nash du jeu bayésien où chaque agent maximise son utilité espérée conditionnelle à ses croyances sur le type des autres agents. L'équilibre bayésien est donc moins exigeant que l'équilibre de Nash en information complète puisque les joueurs ne maximisent leur utilité qu'en espérance.

Si le jeu bayésien sous forme normale $G = \left(\widetilde{S}_1, \cdots, \widetilde{S}_n ; \widetilde{u}_1, \cdots, \widetilde{u}_n\right)$ est un jeu fini, c'est-à-dire si l'ensemble des joueurs et les ensembles de stratégies $\mathscr{S}_i$ sont finis, alors on peut appliquer le théorème de Nash. Pour un tel jeu fini, il existe donc un équilibre de Nash, possiblement en stratégies mixtes.

A titre d'exemple, considérons le jeu suivant pour lequel il faut identifier tous les équilibres de Nash bayésien en stratégies pures :[70] Deux armées opposées sont sur le point de conquérir une île. Chaque général peut choisir soit "attaquer" –*A*– soit "ne pas attaquer" –*NA*–. Chaque armée est soit "puissante" soit "faible" avec probabilité égale (le tirage aléatoire du type de chaque armée est indépendant) et le type de chaque armée n'est connu que de l'armée concernée. La conquête de l'île procure une valeur égale à *M*. Une armée peut conquérir l'île soit en attaquant seule soit en n'attaquant pas seule sachant qu'elle-même est du type "puissante" et l'autre du type "faible". Aucune des deux armées ne peut conquérir l'île si elles attaquent toutes les deux et sont du même type. En attaquant, une armée supporte un coût égal à *s* si elle est du type "puissante" et de *w* si elle est du type "faible" avec $s < w$. En attaquant seule, une armée ne supporte aucun coût.

Pour mettre ce jeu sous la forme normale, nous devons au préalable définir l'espace des stratégies de l'armée *i*. Dans ce jeu, chaque joueur dispose de quatre stratégies, à savoir :

s_{i1} : Attaquer si type "puissant" –*s* ; Attaquer si type "faible" –*w* : (*A*/*s* ; *A*/*w*) ;
s_{i2} : Attaquer si type "puissant" –*s* ; Ne pas attaquer si type "faible" –*w* : (*A*/*s* ; *NA*/*w*) ;
s_{i3} : Ne pas attaquer si type "puissant" –*s* ; Attaquer si type "faible –*w* (*NA*/*s* ; *A*/*w*) ;
s_{i4} : Ne pas attaquer si type "puissant" –*s* ; Ne pas attaquer si type "faible" –*w* : (*NA*/*s* ; *NA*/*w*).

Pour fixer les idées, supposons que *M* = 10, *s* = 3 et *w* = 5. Nous obtenons ainsi la matrice des paiements suivante :

[70] Exemple tiré de Mas-Colell, Whinston and Green (1995), page 265.

Joueur 2

Joueur 1		s_{21}				s_{22}				s_{23}				s_{24}			
		A/s		*A/w*		*A/s*		*NA/w*		*NA/s*		*A/w*		*NA/s*		*NA/w*	
s_{11}	*A/s*	**-3**	-3	**7**	-5	**-3**	-3	**10**	0	**10**	0	**7**	-5	**10**	0	**10**	0
	A/w	**-5**	7	**-5**	-5	**-5**	7	**10**	0	**10**	0	**-5**	-5	**10**	0	**10**	0
s_{12}	*A/s*	**-3**	-3	**7**	-5	**-3**	-3	**10**	0	**10**	0	**7**	-5	**10**	0	**10**	0
	NA/w	**0**	10	**0**	10	**0**	10	**0**	0	**0**	0	**0**	10	**0**	0	**0**	0
s_{13}	*NA/s*	**0**	10	**0**	10	**0**	10	**0**	0	**0**	0	**0**	10	**0**	0	**0**	0
	A/w	**-5**	7	**-5**	-5	**-5**	7	**10**	0	**10**	0	**-5**	-5	**10**	0	**10**	0
s_{14}	*NA/s*	**0**	10	**0**	10	**0**	10	**0**	0	**0**	0	**0**	10	**0**	0	**0**	0
	NA/w	**0**	10	**0**	10	**0**	10	**0**	0	**0**	0	**0**	10	**0**	0	**0**	0

Figure 4.8

Pour déterminer l'équilibre de Nash, on calcule les espérances de paiement de chaque joueur pour tous les profils de stratégies. Par exemple, pour le profil de stratégies (s_{11}, s_{21}), le gain du joueur 1 est de :

- -3 si les deux joueurs attaquent et sont du type *s* (la probabilité est de ¼) ;
- -5 si les deux joueurs attaquent, le joueur 1 étant du type *w* et le joueur 2 du type *s* (la probabilité est de ¼) ;
- 7 si les deux joueurs attaquent, le joueur 1 étant du type *s* et le joueur 2 du type *w* (la probabilité est de ¼) ;
- -5 si les deux joueurs attaquent et sont du type *w* (la probabilité est de ¼).

Pour ce profil, le paiement espéré du joueur 1 est donc $(-3-5+7-5)/4=-1{,}5$. Ce même calcul appliqué, à toutes les combinaisons de stratégies, permet d'obtenir la matrice des paiements suivante :

Joueur 1	Joueur 2				
		s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
	s_{11}	**-1.5** ; -1.5	**3** ; 1	**5.5** ; -2.5	**10** ; 0
	s_{12}	**1** ; 3	**1.75** ; 1.75	**4.25** ; -1.25	**5** ; 0
	s_{13}	**-2.5** ; 5.5	**1.25** ; 4.25	**1.25** ; 1.25	**5** ; 0
	s_{14}	**0** ; 10	**0** ; 5	**0** ; 5	**0** ; 0

Figure 4.9

Ce jeu admet les deux équilibres de Nash bayésiens suivants : (s_{12}, s_{21}) et (s_{11}, s_{22}).

On peut déterminer l'équilibre de Nash bayésien en adoptant une démarche équivalente. Il faut remarquer en effet, qu'avant de faire son choix, chacun des joueurs *i* connaît (observe) son type t_i. Donc, dans un équilibre de Nash bayésien (en stratégies pures), chaque joueur choisit

une stratégie (action) qui soit la meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs (selon la distribution conditionnelle $f_i(t_{-i}/t_i)$) et ce pour chacun des types t_i pouvant survenir. Cette démarche équivalente a donné lieu à la proposition suivante :

<u>Proposition :</u> Le profil de stratégies pures $(s_1^*(t_1),\cdots,s_n^*(t_n))$ est un équilibre de Nash bayésien du jeu $(S_1,\cdots,S_n\,;u_1,\cdots,u_n\,;T\,;F(\cdot))$ si et seulement si pour tout *i*, pour tout $s_i \in S_i$ et pour tout $\bar{t}_i \in T_i$ ayant une probabilité d'occurrence non nulle, on a :

$$\underset{t_{-i}}{E}\left[u_i\left(s_i^*(\bar{t}_i),s_{-i}^*(t_{-i})\,;\bar{t}_i\right)/\bar{t}_i\right] \geq \underset{t_{-i}}{E}\left[u_i\left(s_i(\bar{t}_i),s_{-i}^*(t_{-i});\bar{t}_i\right)/\bar{t}_i\right]$$

C'est-à-dire si :

$$\sum_{t_{-i}} p_i(t_{-i}/\bar{t}_i)\cdot u_i\left(s_i^*(\bar{t}_i),s_{-i}^*(t_{-i}),\bar{t}_i\right) \geq \sum_{t_{-i}} p_i(t_{-i}/\bar{t}_i)\cdot u_i\left(s_i(\bar{t}_i),s_{-i}^*(t_{-i}),\bar{t}_i\right)$$

Cette proposition signifie que dans un équilibre de Nash bayésien, chaque joueur *i* choisit une meilleure réponse à la distribution de probabilité conditionnelle des stratégies des autres joueurs et ce pour chacun des types $\bar{t}_i$ pouvant survenir avec une probabilité non nulle. En d'autres termes, chaque type $\bar{t}_i$ du joueur *i* est considéré comme si c'était un joueur à part entière cherchant à maximiser son utilité espérée étant donné sa distribution conditionnelle sur les stratégies des autres joueurs. Cette approche est qualifiée de *type-centered interpretation*.[71]

Cette caractéristique est bien mise en évidence par exemple, dans le jeu du *free riding* avec asymétrie de l'information. Dans ce jeu, après avoir observé son type (I ou II), le joueur 2 choisit sa meilleure réponse. On a bien $s_i^*(t_i)$.

L'espérance est calculée par rapport aux variables aléatoires que constituent la réalisation des t_{-i} des autres joueurs conditionnel à la réalisation de $\bar{t}_i$.

<u>Démonstration :</u> Nous voulons montrer que :

$$A:\begin{bmatrix} \underset{t_{-i}}{E}\left[u_i\left(s_i^*(\bar{t}_i),s_{-i}^*(t_{-i})\,;\bar{t}_i\right)/\bar{t}_i\right] \geq \underset{t_{-i}}{E}\left[u_i\left(s_i(\bar{t}_i),s_{-i}^*(t_{-i});\bar{t}_i\right)/\bar{t}_i\right] \\ \text{pour tout } i,\ \text{tout } \bar{t}_i \in T_i,\ \text{ayant une probabilité} \\ \text{d'occurrence non nulle et pour tout } s_i \in S_i \end{bmatrix} \Leftrightarrow B:\begin{bmatrix} (s_1^*(t_1),\cdots,s_n^*(t_n)) \\ \text{est un équilibre de} \\ \text{Nash Bayesien} \end{bmatrix}$$

On doit donc montrer que $A \Rightarrow B$ et que non $A \Rightarrow$ non B.

Si l'inégalité de *A* n'est pas satisfaite pour un joueur *i* pour au moins un type $\bar{t}_i \in T_i$ survenant avec une probabilité positive, alors le joueur *i* peut améliorer son paiement en choisissant une meilleure stratégie dans le cas d'occurrence de $\bar{t}_i$. Ceci contredit le fait que $(s_1^*(t_1),\cdots,s_n^*(t_n))$ est un équilibre de Nash bayésien.

[71] J. Harsanyi, J. (1995). "Games with Incomplete Information". *The American Economic Review*, Vol. 85, n° 3, page 295. June 1995.

Pour montrer que l'inégalité est suffisante, il faut remarquer que si elle est vérifiée pour tout $\bar{t}_i \in T_i$ ayant une probabilité non nulle, le joueur *i* ne peut améliorer son paiement en déviant de $s_i^*(\bar{t}_i)$.

L'application de cette proposition à l'exemple de la conquête de l'île permet de vérifier l'équivalence des deux démarches. Pour chacun des deux joueurs, on détermine l'espérance de paiement lorsqu'il est du type *s* et lorsqu'il est du type *w*, l'espérance étant calculée par rapport à ses croyances. Ainsi, lorsque le joueur 2 joue s_{21}, le joueur 1 obtient :

$$u_1(A, s_{21}, s) = \frac{1}{2}(-3) + \frac{1}{2}(7) = 2$$
$$u_1(NA, s_{21}, s) = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0) = 0$$
$$u_1(A, s_{21}, w) = \frac{1}{2}(-5) + \frac{1}{2}(-5) = -5$$
$$u_1(NA, s_{21}, w) = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0) = 0$$

On a ainsi $u_1(A, s_{21}, s) > u_1(NA, s_{21}, s)$ et $u_1(NA, s_{21}, w) > u_1(A, s_{21}, w)$. Par conséquence, la meilleure réponse à s_{21} est $(A/s, NA/w) = s_{12}$, soit $b_1(s_{21}) = s_{12}$.

La meilleure réponse du joueur 1 par rapport aux autres stratégies du joueur 2 est obtenue de la même manière, ce qui donne $b_1(s_{22}) = s_{11}$, $b_1(s_{23}) = s_{11}$ et $b_1(s_{24}) = s_{11}$. La même démarche est appliquée au joueur 2 et on a $b_2(s_{11}) = s_{22}$, $b_2(s_{12}) = s_{21}$, $b_2(s_{13}) = s_{21}$ et $b_2(s_{14}) = s_{21}$. En rassemblant les meilleures réponses des deux joueurs, on obtient les deux équilibres de Nash bayésiens identifiés plus haut, à savoir (s_{12}, s_{21}) et (s_{11}, s_{22}).

		Joueur 2			
		s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
Joueur 1	s_{11}		b_1 b_2	b_1	b_1
	s_{12}	b_1 b_2			
	s_{13}	b_2			
	s_{14}	b_2			

Figure 4.10

Ce résultat est identique à celui obtenu en utilisant la définition de l'équilibre de Nash bayésien à partir de la forme normale.

4.4. Application : Le modèle de Cournot selon l'approche de Harsanyi

Nous considérons maintenant l'exemple du modèle de la section 4.1, avec avec une asymétrie de l'information pour les deux firmes. Chacune des deux firmes choisit une quantité à produire q_i avec comme objectif la maximisation de son profit dont l'expression est $\pi_i = q_i(a-(q_1+q_2)-c_i) = q_i(t_i-(q_1+q_2))$ avec $t_i = a - c_i$. Chaque firme *i* a une incertitude concernant le coût marginal c_{-i} de l'autre firme de sorte que t_{-i} peut être égal soit à 3/4 soit à 5/4. Nous avons donc $T_1 = T_2 = \{H, L\}$. Cette incertitude est résumée par la distribution jointe *a priori* $p(t)$ suivante qui est connaissance commune :

Type de la firme 2

Type de la firme 1		3/4	5/4	
	3/4	3/8	1/8	$P(t_1 = 3/4) = 1/2$
	5/4	1/8	3/8	$P(t_1 = 5/4) = 1/2$
		$P(t_2 = 3/4) = 1/2$	$P(t_2 = 5/4) = 1/2$	

Figure 4.11

On dira que la firme *i* est du type *L* (coût marginal faible) si $t_i = 5/4$ et du type *H* (coût marginal élevé) si $t_i = 3/4$. La détermination du type t_i de la firme *i* est le résultat du mouvement de la Nature, mouvement représentant la première étape du jeu. Chacune des deux firmes observe par la suite son type et en déduit des probabilités révisées pour le type de l'autre firme. Sur la base de leurs croyances, chaque firme choisit la quantité qui maximise son espérance de profit. L'équilibre obtenu est un équilibre de Nash bayésien et est de la forme $(q_1^{L*}, q_1^{H*}, q_2^{L*}, q_2^{H*})$.

Pour la détermination de l'équilibre de Nash bayésien $(q_1^{L*}, q_1^{H*}, q_2^{L*}, q_2^{H*})$, commençons par la firme 1 qui peut être soit du type *L* soit du type *H*. On considère (le joueur 2 également) en premier lieu que par suite du mouvement de la Nature, le type de la firme 1 est *L*. Après observation de son type *L* et par application de la formule de Bayes, la firme 1 en déduit les probabilités *a posteriori* (révisées) sur le type t_2 du joueur 2, soit :

$$P(t_2 = 3/4 / t_1 = 5/4) = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$$
$$P(t_2 = 5/4 / t_1 = 5/4) = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$$

Le type *L* de la firme 1 détermine la quantité q_1^{L*} qui maximise son espérance de profit conditionnelle à ses croyances. Le programme de la firme 1 lorsqu'elle est du type *L* est :

$$\underset{q_1^L}{\text{Max}}\ \pi_1^L = \frac{1}{4}\left[q_1^L\left(\frac{5}{4} - q_1^L - q_2^H\right)\right] + \frac{3}{4}\left[q_1^L\left(\frac{5}{4} - q_1^L - q_2^L\right)\right]$$

La condition du premier ordre, nécessaire et suffisante, est :

$$\frac{d\pi_1^L}{dq_1^L} = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4} - q_1^L - q_2^H - q_1^L\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{5}{4} - q_1^L - q_2^L - q_1^L\right) = 0$$

$$\frac{d\pi_1^L}{dq_1^L} = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4} - 2q_1^L - q_2^H\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{5}{4} - 2q_1^L - q_2^L\right) = 0$$

$$\frac{5}{4} - 2q_1^L - \left(\frac{1}{4}q_2^H + \frac{3}{4}q_2^L\right) = 0$$

$$q_1^{L*} = \frac{\frac{5}{4} - \left(\frac{1}{4}q_2^H + \frac{3}{4}q_2^L\right)}{2}$$

Maintenant, on considère que par suite du mouvement de la Nature, la firme 1 est du type *H*. En se basant sur l'observation de son propre type, la firme 1 détermine les probabilités révisées (*a posteriori*) sur le type du joueur 2, ce qui donne $P(t_2 = 3/4/t_1 = 3/4) = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$ et $P(t_2 = 5/4/t_1 = 3/4) = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$. Le type *H* de la firme 1 choisit la quantité q_1^{H*} qui maximise son espérance d'utilité conditionnelle à ses croyances. Le programme de la firme 1 lorsqu'elle est du type *H* est donc :

$$\underset{q_1^H}{\text{Max}}\ \pi_1^H = \frac{3}{4}\left[q_1^H\left(\frac{3}{4} - q_1^H - q_2^H\right)\right] + \frac{1}{4}\left[q_1^H\left(\frac{3}{4} - q_1^H - q_2^L\right)\right]$$

La condition du premier ordre, nécessaire et suffisante, donne :

$$q_1^{H*} = \frac{\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}q_2^H + \frac{1}{4}q_2^L\right)}{2}$$

La même démarche, appliquée à la firme 2, permet de déterminer les quantités q_2^{L*} et q_2^{H*}, soit :

$$q_2^{L*} = \frac{\frac{5}{4} - \left(\frac{1}{4}q_1^H + \frac{3}{4}q_1^L\right)}{2}$$

$$q_2^{H*} = \frac{\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}q_1^H + \frac{1}{4}q_1^L\right)}{2}$$

Dans les quatre équations ci-dessus, q_1^{L*}, q_1^{H*}, q_2^{L*} et q_2^{H*} représentent les fonctions de meilleure réponses des firmes 1 et 2 pour chaque type possible. L'équilibre de Nash bayésien

$\left(q_1^{L*}, q_1^{H*}, q_2^{L*}, q_2^{H*}\right)$ est la solution de ces quatre fonctions de meilleure réponse mais en remplaçant q_1^L par q_1^{L*}, q_1^H par q_1^{H*}, q_2^L par q_2^{L*} et q_2^H par q_2^{H*}, ce qui donne :

$$q_1^{L*} = \frac{\frac{5}{4} - \left(\frac{1}{4} q_2^{H*} + \frac{3}{4} q_2^{L*}\right)}{2}$$

$$q_1^{H*} = \frac{\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4} q_2^{H*} + \frac{1}{4} q_2^{L*}\right)}{2}$$

$$q_2^{L*} = \frac{\frac{5}{4} - \left(\frac{1}{4} q_1^{H*} + \frac{3}{4} q_1^{L*}\right)}{2}$$

$$q_2^{H*} = \frac{\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4} q_1^{H*} + \frac{1}{4} q_1^{L*}\right)}{2}$$

Ce système de quatre équations peut s'écrire comme suit :

$$2\, q_1^{L*} + 0\, q_1^{H*} + \frac{3}{4} q_2^{L*} + \frac{1}{4} q_2^{H*} = \frac{5}{4}$$

$$0\, q_1^{L*} + 2\, q_1^{H*} + \frac{1}{4} q_2^{L*} + \frac{3}{4} q_2^{H*} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} q_1^{L*} + \frac{1}{4} q_1^{H*} + 2\, q_2^{L*} + 0\, q_2^{H*} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{4} q_1^{L*} + \frac{3}{4} q_1^{H*} + 0\, q_2^{L*} + 2\, q_2^{H*} = \frac{3}{4}$$

Sous forme matricielle, ce système d'équations est donnée par :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 2 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1^{L*} \\ q_1^{H*} \\ q_2^{L*} \\ q_2^{H*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

La solution de ce système d'équations donne l'équilibre de Nash bayésien, c'est-à-dire : $\left(q_1^{L*}, q_1^{H*}, q_2^{L*}, q_2^{H*}\right) = \left(\frac{13}{30}; \frac{7}{30}; \frac{13}{30}; \frac{7}{30}\right)$.

Chapitre 5 : Jeux dynamiques à information incomplète

Nous abordons maintenant la classe des jeux dynamiques à information incomplète (ou imparfaite).[72] Dans cette classe de jeux, on étudie l'issue de l'interaction des joueurs en l'existence simultanée de deux difficultés. En premier lieu, au moins l'un des joueurs ne dispose pas de toute l'information pertinente concernant les caractéristiques des autres joueurs (information incomplète). En second lieu, le jeu est dynamique, ce qui peut donner aux joueurs lors du déroulement du jeu la possibilité d'extraire de nouvelles informations à partir de l'observation des actions passées.

Chaque joueur peut donc réviser ses croyances sur l'autre joueur et ce dernier doit en tenir compte lors du choix de son action. Ainsi, dans un jeu dynamique à information incomplète ou imparfaite, il existe non seulement une interaction entre les stratégies des joueurs mais également une interaction entre stratégies et croyances. Pour cela, les croyances des joueurs prennent un rôle central dans le concept d'équilibre approprié à cette classe de jeux.

5.1. L'importance des croyances dans le concept d'équilibre d'un jeu dynamique à information incomplète

L'interaction entre stratégies et croyances est ainsi au cœur de la résolution d'un jeu dynamique à information incomplète. Le concept d'équilibre approprié pour cette classe de jeux est l'équilibre de Nash bayésien parfait, ou tout simplement équilibre bayésien parfait. Nous exposerons également brièvement deux autres concepts d'équilibre, à savoir l'équilibre séquentiel (Kreps et Wilson, 1982) et l'équilibre parfait avec « mains tremblantes » (Selten, 1975).

L'équilibre bayésien parfait est une synthèse entre l'équilibre bayésien des jeux à information incomplète et l'équilibre parfait des jeux dynamiques. Mais, l'équilibre bayésien parfait n'est pas seulement cette synthèse car les joueurs peuvent réviser leurs croyances durant le déroulement du jeu.

Nous avons vu que dans un jeu dynamique à information complète, le principe de rationalité séquentielle implique qu'un équilibre du jeu est également un équilibre dans tous les sous-jeux de l'équilibre (perfection en sous-jeux). L'introduction du principe de rationalité séquentielle a pu ainsi permettre d'écarter les équilibres de Nash non raisonnables.

Mais, lorsque le jeu dynamique est à information incomplète (ou imparfaite), le principe de rationalité séquentielle peut être insuffisant comme le montre ci-dessous l'exemple du jeu de la figure 5.1. On a dans ce cas besoin d'un concept d'équilibre plus restrictif. La démarche consistant à définir de nouveaux concepts pour des situations de jeux de plus en plus complexes est un processus de raffinement de l'équilibre de Nash qui vise à exclure les

[72] Nous avons vu au chapitre 4 qu'à la suite de Harsanyi, un jeu à information incomplète peut être réinterprété comme étant un jeu à information imparfaite.

équilibres non plausibles qui auraient été retenus si on devait appliquer le concept d'équilibre défini pour des jeux plus simples.

Pour présenter les concepts d'équilibre appropriés aux jeux dynamiques à information incomplète (ou imparfaite), nous suivrons les étapes suivantes :

1. Nous devons montrer, à partir d'un exemple, que la perfection en sous-jeux n'est pas toujours suffisante pour éliminer des équilibres de Nash non raisonnables.

2. La solution proposée consiste en l'extension du principe de rationalité séquentielle à tous les ensembles d'information (et non plus aux seuls sous jeux) et en l'introduction de croyances à ces ensembles d'information. Le joueur devant joueur à l'ensemble d'information *H* choisit une action optimale étant données ses croyances sur les différents nœuds de l'ensemble *H*.

3. On définit ainsi un concept d'équilibre pour les jeux dynamiques à information incomplète (ou imparfaite) et qui est l'équilibre bayésien parfait *au sens faible*. Un équilibre dans un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) doit donc spécifier les couples composés d'une part des *stratégies d'équilibre* et d'autre part des *croyances* les soutenant. De ce fait, les croyances des joueurs aux ensembles d'information *atteints à l'équilibre* (appartenant au sentier d'équilibre) deviennent un élément explicite de l'équilibre. Ce concept d'équilibre est basé sur deux exigences :

    - *Principe de rationalité séquentielle* : En tout point du jeu (ensembles d'information singletons ou non), les joueurs choisissent des actions optimales (maximisation de l'espérance de paiement) étant données les croyances sur les actions choisies jusqu'à ce point du jeu.

    - *Consistance des croyances* : les croyances doivent être consistantes avec les stratégies jouées à cet équilibre.

4. L'équilibre bayésien parfait ainsi défini est au sens faible car il ne prévoit aucune restriction sur les croyances des joueurs aux ensembles d'information *non atteints à l'équilibre* (atteint avec probabilité 0). A travers un exemple, nous montrons la nécessité de spécifier des croyances même pour des ensembles d'information hors sentier d'équilibre.

5. L'introduction de restrictions supplémentaires pour les croyances hors sentier d'équilibre a pris deux principales voies :

    - L'une des voies considère les différentes applications (par exemple, le modèle de signal) et introduit des restrictions raisonnables spécifiques, ou *raffinements*, sur les croyances hors sentier d'équilibre. L'équilibre ainsi obtenu est appelé équilibre bayésien parfait. Parmi les nombreux raffinements proposés citons à titre d'exemple : critère de la perfection en sous-jeux, critère de domination, critère de domination par l'équilibre, critère intuitif, …

- L'autre voie consiste à définir des concepts d'équilibre incluant d'emblée des exigences sur les croyances sur et en dehors du sentier d'équilibre, ceci à travers la notion de *stratégies totalement mixtes* dues à la possibilité d'erreur lors du choix des stratégies. L'équilibre séquentiel (Kreps et Wilson, 1982) et l'équilibre parfait avec « mains tremblantes » (Selten, 1975) appartiennent à cette voie.

Les restrictions introduites par l'équilibre bayésien parfait répondent à l'exigence de raffinement de l'équilibre de Nash bayésien, car ce dernier à été défini pour des jeux statiques à information incomplète et ne permet donc pas d'exclure les promesses/menaces non crédibles. Cependant, le raffinement de l'équilibre bayésien parfait ne se base pas sur la notion de sous-jeu, mais sur celle plus générale d'ensemble d'information qui peut être un singleton ou non. Par analogie à l'équilibre de Nash parfait, pour qu'un profil de stratégies soit un équilibre bayésien parfait, il faut qu'il soit un équilibre de Nash non seulement pour le jeu en tant que tout, mais également pour tous les ensembles d'information du jeu.

La compréhension de plusieurs phénomènes économiques a été grandement améliorée par l'utilisation du concept d'équilibre des jeux dynamiques à information incomplète (ou imparfaite). Nous aborderons ci-dessous une application importante de ce concept d'équilibre à savoir les jeux de signaux. Citons également une autre application importante et qui est le modèle de réputation.[73]

5.2. L'insuffisance de la perfection en sous-jeux dans un jeu dynamique à information incomplète

Rappelons que l'extension du concept d'équilibre de Nash à des jeux dynamiques à information complète et parfaite a été rendu possible par l'introduction de la notion de sous jeux. Mais cette exigence n'est pas toujours suffisante lorsque le jeu dynamique est, de plus, à information imparfaite (un des joueurs au moins n'observe pas toute l'histoire du jeu). Pour faire ressortir l'existence de cette difficulté, considérons le jeu représenté par la figure 5.1.

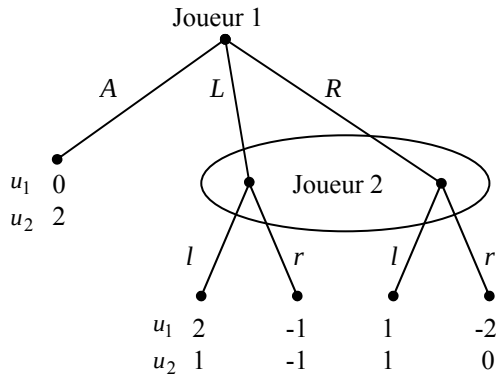


Figure 5.1.

Dans ce jeu, le joueur 1 joue en premier et a le choix entre les trois actions *A*, *L* ou *R*. S'il choisit *A*, le jeu se termine. S'il choisit *L* ou *R*, le joueur 2 jouera à son tour en choisissant *l* ou *r*. Au moment de jouer, le joueur 2 n'observe pas quelle action (*L* ou *R*) le joueur 1 a choisi.

[73] Jean Tirole, The Theory of Industrial Organisation. The MIT press, 1988. Page 439.

Pour identifier les équilibres de Nash de ce jeu, mettons-le sous la forme normale, ce qui donne :[74]

		Joueur 2	
		l si « non *A* »	*r* si « non *A* »
Joueur 1	*A*	0 , 2	0 , 2
	L	2 , 1	- 1 , - 1
	R	1 , 1	- 2 , 0

Figure 5.2

Cette forme normale montre que ce jeu admet deux équilibres de Nash et qui sont : (*L*, *l* si « non *A* ») et (*A*, *r* si « non *A* »).

Afin de déterminer si ces deux équilibres de Nash sont des équilibres de Nash parfaits, nous utiliserons la forme extensive pour vérifier s'ils constituent bien des équilibres de Nash dans tous les sous-jeux. L'analyse de la forme extensive montre cependant que ce jeu n'admet aucun sous-jeu, hormis le jeu lui-même. Or, dans un jeu ne contenant aucun sous-jeu, l'équilibre de Nash se confond avec l'équilibre de Nash parfait. En conséquence, les deux équilibres de Nash (*L*, *l* si « non *A* ») et (*A*, *r* si « non *A* ») sont également des équilibres de Nash parfaits.

Mais un simple examen de ces deux équilibres montre que le second équilibre de Nash n'est pas un équilibre raisonnable. En effet, quelque soit l'action (*L* ou *R*) choisie par le joueur 1, la meilleure action du joueur 2 est de jouer *l* si « non *A* ».[75] La solution proposée pour l'élimination de l'équilibre de Nash non raisonnable consiste en l'introduction de la notion de *croyances*. Ce type de raffinement consiste à considérer qu'au moment de jouer, le joueur 2 dispose de croyances sur l'action qui a été choisie par le joueur 1. Ces croyances sont des probabilités d'occurrence affectées aux différentes actions possibles du joueur 1. Sur la base de ces croyances, le joueur 2 choisit une action optimale, en fait l'action lui procurant l'espérance de paiement la plus élevée.

Cette exigence est en fait une extension du principe de rationalité séquentielle. A travers ce principe, pour qu'un équilibre de Nash soit considéré comme une prédiction raisonnable, il est exigé qu'à tout ensemble d'information sur le sentier d'équilibre (et non plus seulement au niveau des sous jeux), le joueur à qui c'est le tour de joueur choisit une action optimale en fonction des croyances qu'il a sur l'action choisie par l'autre joueur.

En considérant le jeu de la figure 5.1, on peut observer que l'action *r* si « non *A* » n'est optimale pour aucune croyance du joueur 2 car en jouant *l* si « non *A* », le joueur 2 obtient un paiement supérieur quelque soit le choix du joueur 1. Le second équilibre contient donc une réponse non crédible du joueur 2. De ce fait, l'équilibre de Nash (*A*, *r* si « non *A* ») ne peut être considéré comme une prédiction raisonnable.

[74] Cet exemple est donné par Kreps et Wilson (1982), page 871.
[75] Pour le joueur 2, l'action *l* domine strictement l'action *r*.

5.3. L'équilibre bayésien parfait au sens faible

L'équilibre de Nash d'un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) requiert qu'en tout point du jeu, l'action de chaque joueur soit optimale étant donnée la meilleure réponse des autres joueurs. Il s'agit donc d'une extension du principe de rationalité séquentielle qui doit s'appliquer à tous les ensembles d'information, qu'ils soient singletons ou non. Lorsque le joueur *i* doit joueur à l'ensemble d'information *H*, le principe de rationalité séquentielle nécessite que le joueur *i* affecte une probabilité d'occurrence (croyance) à chaque nœud *x* de l'ensemble *H*.

L'introduction de croyances dans la définition du concept d'équilibre pour les jeux dynamiques à information incomplète (ou imparfaite) s'avère être décisive car un choix n'est optimal qu'étant données des croyances. Les croyances deviennent donc un élément à part entière de l'équilibre d'un jeu. Avant d'énoncer cette première propriété de l'équilibre d'un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite), donnons la définition formelle des croyances.[76]

Définition : *Un système de croyances* μ *d'un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) est la fonction* $\mu : H \to [0,1]$ *tel que* $\sum_{x \in H} \mu(x) = 1$ *pour tout ensemble H du jeu.* $\mu(x)$ *est la probabilité d'occurrence du nœud* $x \in H$ *assigné par le joueur* $i(H)$.

Nous énonçons maintenant la propriété 1 de l'équilibre d'un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite).

Propriété 1 : *A chaque ensemble d'information H, le joueur* $i(H)$ *qui doit joueur à cet ensemble d'information H, dispose de croyances à propos des nœuds atteints par le jeu.*

En considérant le jeu de la figure 5.1, la propriété 1 signifie que si le jeu atteint l'ensemble d'information non singleton du joueur 2, ce dernier doit avoir des croyances à propos de quel nœud est atteint par le jeu. Un système de croyances μ est la distribution de probabilité $(p, 1-p)$ assignée par le joueur 2 où *p* est la probabilité que le jeu ait atteint le nœud *L* et $(1-p)$ la probabilité que le jeu ait atteint le nœud *R*. Dans la figure 5.3, les croyances $(p, 1-p)$ du joueur 2 sont indiquées à l'intérieur de l'ellipse représentant l'ensemble d'information du joueur 2.

[76] Voir Kreps et Wilson (1982), page 871.

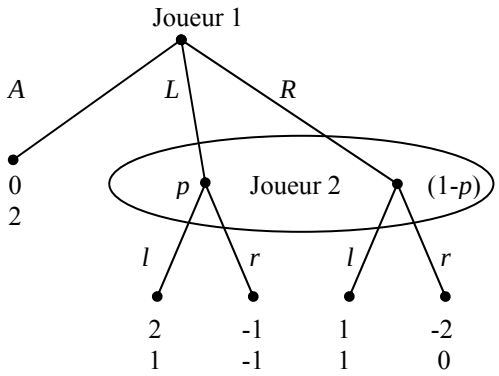


Figure 5.3.

Le principe de rationalité séquentielle donne lieu à la deuxième propriété de l'équilibre d'un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite).

Propriété 2 : *A chaque ensemble d'information H, l'action choisie par le joueur* $i(H)$ *doit être optimale étant données ses croyances à cet ensemble d'information.*

La rationalité est ici interprétée comme étant un comportement de maximisation de l'espérance de paiement (d'utilité).

Etant données les croyances du joueur 2, celui-ci obtient une espérance de paiement égale à $p.(1)+(1-p).(1)=1$ s'il joue *l* et égal à $p.(-1)+(1-p).0=-p$ s'il joue *r*. Comme $1>-p$ pour tout *p*, la propriété 2 empêche le joueur 2 de jouer *r*. Ainsi, en exigeant de chaque joueur qu'il ait des croyances et qu'il agisse de façon optimale étant données ces croyances, suffit à éliminer l'équilibre non plausible (*A*, *r* si « non *A* »).

Les propriétés 1 et 2 imposent que les joueurs aient des croyances et qu'ils agissent de façon optimale, mais ne formulent aucune exigence à propos de ces croyances. Afin d'imposer des conditions supplémentaires, notamment de cohérence interne, nous devons distinguer au préalable les ensembles d'information situés sur le sentier d'équilibre de ceux situés en dehors du sentier d'équilibre.

Définition : *Pour un équilibre donné dans un jeu sous forme extensive, un ensemble d'information est situé sur le sentier d'équilibre s'il sera atteint avec une probabilité positive si le jeu est joué conformément aux stratégies d'équilibre. Un ensemble d'information est situé en dehors du sentier d'équilibre s'il est certain qu'il ne sera pas atteint si le jeu est joué conformément aux stratégies d'équilibre.*

Comme le concept d'équilibre pour un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) comporte à la fois les stratégies des joueurs et leurs croyances, la question de la *cohérence* entre ces deux composants devient centrale. Ainsi, pour qu'un équilibre d'un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) soit une prédiction raisonnable, il est nécessaire que les croyances à cet équilibre soient cohérentes avec les stratégies de cet équilibre. Commençons l'analyse de cette notion de cohérence par un ensemble d'information atteint à l'équilibre, celle concernant les ensembles d'information non atteints à l'équilibre étant reportée à la section 5.4. Supposons pour cela que dans le jeu de la figure 5.1, le joueur 1

utilise la stratégie complètement mixte assignant la probabilité $\frac{1}{2}$ à l'action *A*, la probabilité $\frac{1}{3}$ à l'action *L* et la probabilité $\frac{1}{6}$ à l'action *R*.[77] Dans ce cas, l'ensemble d'information du joueur 2 est atteint avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Alors, les probabilités conditionnelles de *L* et de *R* de l'ensemble d'information du joueur 2 étant donné que cet ensemble d'information est atteint sont déterminées par application de la règle de Bayes :

- La probabilité de *L* étant donné que l'ensemble d'information du joueur 2 est atteint est :

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=\frac{2}{3}$$

- La probabilité de *R* étant donné que l'ensemble d'information du joueur 2 est atteint est :

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}$$

Les probabilités (croyances) *a posteriori* $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ du joueur 2 sont consistantes avec la stratégie mixte $(\sigma_A, \sigma_L, \sigma_R)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$. La condition de cohérence des croyances sur le sentier d'équilibre est la troisième propriété de l'équilibre d'un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite).

Propriété 3 *: A chaque ensemble d'information situé sur le sentier d'équilibre (atteint avec une probabilité strictement positive), les croyances sont déduites des stratégies d'équilibre des joueurs par utilisation de la règle de Bayes.*

Les propriétés 1 à 3 permettent de donner la définition de l'équilibre bayésien parfait au sens faible.

Définition : *Un équilibre bayésien parfait au sens faible pour un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) consiste en un couple de stratégies* σ *et de croyances* μ *satisfaisant les propriétés 1 à 3.*

Les propriétés 1 à 3 rendent bien compte de l'esprit de l'équilibre bayésien parfait : *En tout ensemble d'information situé sur le sentier d'équilibre, un joueur choisit une action qui*

[77] Rappelons qu'une stratégie complètement (ou totalement) mixte est une stratégie mixte où toutes les stratégies pures sont jouées avec une probabilité strictement positive.

maximise son espérance de paiement, compte tenu des probabilités a posteriori et des stratégies des autres joueur.

Dans l'équilibre de Nash parfait (*L*, *l* si « non *A* »), les croyances du joueur 2 doivent être tel que $p = 1$.[78] En effet, à cet équilibre présumé, le joueur 2 cherche à déterminer sa meilleure réponse au choix de *L* par le joueur 1. Il suppose donc que le joueur 1 a choisi *L*. La croyance cohérente à cette supposition est $p = 1$. L'équilibre bayésien parfait au sens faible est le couple stratégies / croyances suivant : (*L*, *l* si « non *A* », $p = 1$).[79]

L'équilibre bayésien parfait au sens faible signifie qu'en tout point du jeu :

- Les actions choisies par les joueurs doivent être optimales étant données les stratégies des autres joueurs et les croyances sur l'évolution du jeu ;
- Les croyances doivent être consistantes (cohérentes) avec les stratégies jouées.

L'équilibre bayésien parfait au sens faible est donc le produit de deux exigences :

- *La rationalité séquentielle* : les stratégies jouées à l'équilibre doivent former un équilibre parfait, compte tenu des croyances ;
- *La cohérence bayésienne* : les croyances doivent être obtenues par révision bayésienne des croyances *a priori*, compte tenu des stratégies d'équilibre.

L'équilibre bayésien parfait est une mixture du concept d'équilibre parfait des jeux dynamiques et du concept d'équilibre bayésien des jeux à information incomplète. De plus, cette mixture doit satisfaire à une condition de *point fixe* dans la mesure où les stratégies d'équilibre sont optimales étant données les croyances et ces dernières sont cohérentes aux stratégies d'équilibre.

L'équilibre bayésien parfait permet de tenir compte du fait que durant le déroulement du jeu, de l'information est indirectement transmise entre les joueurs. Ceci donne donc aux joueurs la possibilité de réviser leurs croyances (probabilités) sur les types des autres joueurs suite à l'observation des choix antécédents de ces autres joueurs. En procédant à un choix donné, les joueurs révèlent de l'information sur leur type.

5.4. Equilibre bayésien parfait et croyances hors sentier d'équilibre

Pour la définition de l'équilibre bayésien parfait au sens faible, l'exigence de cohérence des croyances n'a porté que sur les croyances au niveau des ensembles d'information situés sur le sentier d'équilibre (ensembles d'information atteints avec une probabilité non nulle). C'est d'ailleurs cette caractéristique qui a motivé le qualificatif « au sens faible ». Afin que l'équilibre soit une prédiction raisonnable (crédible), il est nécessaire de poser des exigences de cohérence, ceci pour les croyances en dehors du sentier d'équilibre.

Pour qu'un sentier (séquence d'actions) soit optimal, il faut qu'il soit une meilleure réponse par rapport aux actions hors sentier d'équilibre. Il faut donc connaître les paiements qu'on

[78] Rappelons que *p* est la croyance du joueur 2 que le joueur 1 ait joué *L*.

[79] En anticipant quelque peu sur la section suivante, relevons que dans cet équilibre, il n'existe pas d'ensemble d'information en dehors du sentier de l'équilibre. Il n'existe pas donc pas de croyances hors équilibre. De ce fait, (*L*, *l* si « non *A* », $p = 1$) est un équilibre bayésien parfait (sans rajout de la notion « au sens faible »).

pourrait obtenir en cas de déviation vers les actions hors sentier d'équilibre. Or, ces paiements dépendent, entre autres, des *croyances hors sentier d'équilibre*. En conséquence, un équilibre bayésien parfait doit non seulement spécifier les actions et les croyances sur le sentier d'équilibre, mais également les croyances hors sentier d'équilibre. Ces dernières doivent de plus satisfaire certains critères, en ce sens qu'elles doivent être raisonnables.

L'exemple de la figure 5.4 montre bien la nécessité de spécifier des croyances raisonnables non seulement au niveau des ensembles d'information atteints à l'équilibre mais également au niveau des ensembles d'information non situées sur le sentier d'équilibre.

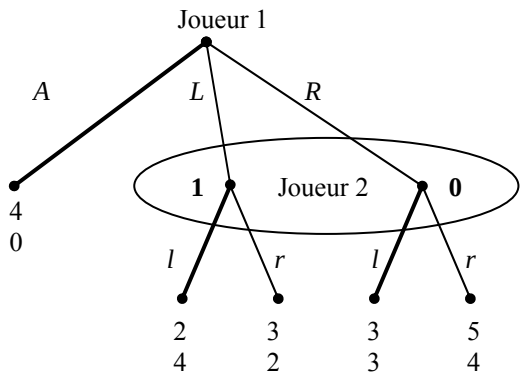


Figure 5.4.

Dans ce jeu, l'issue $(A, l \text{ si "non } A\text{"}, \Pr ob(L)=1)$ est bien un équilibre bayésien parfait au sens faible[80]. En effet, étant données les croyances du joueur 2 (c'est-à-dire $\Pr ob(L)=1$), le choix optimal du joueur 2 est l'action *l*. De même, étant donné ce choix du joueur 2, la meilleure réponse du joueur 1 est de joueur *A*. Les seules croyances de cet équilibre, soit $\Pr ob(L)=1$ et $\Pr ob(R)=0$ se rapportent à un ensemble d'information n'appartenant pas au sentier d'équilibre (atteint avec une probabilité nulle). Ces croyances ne sont pas en contradiction avec la définition de l'équilibre bayésien parfait au sens faible et donc l'issue $(A, l \text{ si "non } A\text{"}, \Pr ob(L)=1)$ est bien un équilibre bayésien parfait au sens faible. Mais un simple examen de cet équilibre tel que représenté dans la figure 5.4 montre que ces croyances hors sentier d'équilibre ne sont pas raisonnables. En effet, pour le joueur 1, l'action *L* est strictement dominée par l'action *R*. Raisonnablement, si le joueur 1 ne retient pas l'action *A*, son choix optimal devient l'action *R*. La croyance raisonnable à cet ensemble d'information est de ce fait $\Pr ob(R)=1$. Etant donnée cette dernière croyance, le meilleur choix du joueur 2 est $(r \text{ si "non } A\text{"})$ et la meilleure réponse du joueur 1 est bien l'action *R*. L'équilibre bayésien parfait ainsi obtenu $(R, r \text{ si "non } A\text{"}, \Pr ob(R)=1)$ est repris dans la figure 5.5. Notons qu'à cet équilibre, le qualificatif « au sens faible » n'a pas été repris car il ne comporte pas de croyances non raisonnables en dehors du sentier d'équilibre.

[80] Les actions de cet équilibre sont mises en évidence par les traits gras et les croyances indiquées dans l'ensemble d'information du joueur 2.

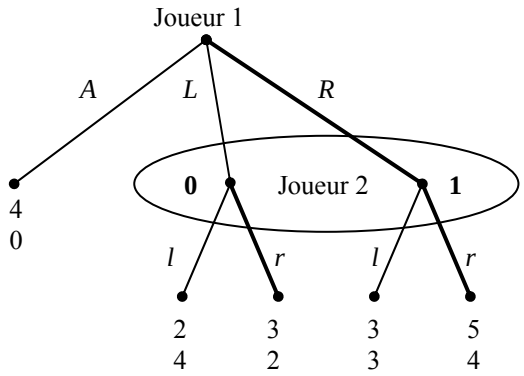


Figure 5.5.

Raffinement sur la base du critère de domination

Dans l'équilibre décrit dans la figure 5.5, le caractère raisonnable des croyances en dehors du sentier d'équilibre est basé sur un raffinement des croyances obtenu par application du critère de domination.

Raffinement sur la base du critère de perfection en sous-jeux

Mas-Colell, Whinston & Green (1995) montrent à partir d'un exemple qu'un jeu dynamique en information imparfaite peut admettre un équilibre bayésien parfait au sens faible sans que ce dernier ne soit un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux.[81] La raison de cette incohérence est l'absence, dans la définition de l'équilibre bayésien parfait au sens faible, de restrictions portant sur les croyances hors équilibre. Il résulte de cet exemple, qu'une exigence immédiate à imposer aux croyances hors équilibre est un raffinement basé sur la perfection en sous-jeux. Pour qu'un équilibre bayésien parfait soit une prédiction raisonnable, il faut qu'il spécifie un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux.

Raffinement sur la base du critère de domination par l'équilibre

Le critère de domination par l'équilibre permet d'obtenir un raffinement supplémentaire des croyances en dehors du sentier d'équilibre. Considérons pour cela le jeu de la figure 5.6.

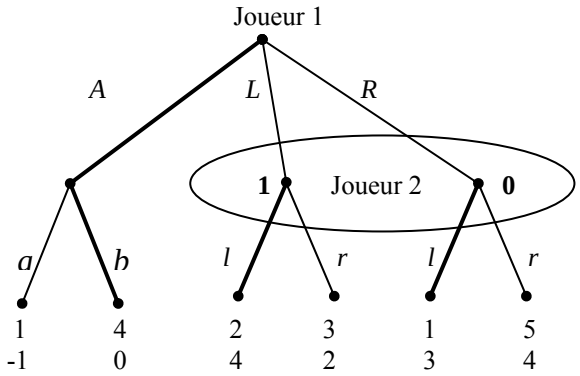


Figure 5.6.

[81] A. Mas-Colell, M. Whinston & J. Green,1995. Page 290.

Dans ce jeu, l'issue $(A, (b \text{ si } A, l \text{ si "non } A"), \Pr ob(L) = 1)$ est bien un équilibre bayésien parfait au sens faible.[82] Cependant et comme pour le jeu de la figure 5.4, cet équilibre est basé sur des croyances non raisonnables en dehors du sentier d'équilibre (c'est-à-dire au niveau de l'ensemble d'information du joueur 2). A la différence du jeu de la figure 5.4, l'action *L* n'est pas dominée par l'action *R* car le paiement du joueur 1 peut être supérieur ou inférieur à celui obtenu de par l'action *L*. En fait, pour le joueur 1, l'action *L* est dominée par l'équilibre $(A, (b \text{ si } A, l \text{ si "non } A"), \Pr ob(L) = 1)$ car à cet équilibre, l'action *A* procure au joueur 1 un paiement de 4, supérieur au paiement de 2 ou 3 permis par l'action *L*. Il n'est donc pas raisonnable que le joueur 2 puisse croire que $\Pr ob(L) = 1$ car si le joueur 1 venait à dévier de sa stratégie d'équilibre *A*, c'est pour obtenir un paiement plus élevé. Il choisira dans ce cas l'action *R* (obtenant ainsi un paiement de 5) et non l'action *L*. L'équilibre bayésien parfait au sens faible décrit dans la figure 5.6 ne peut être considéré comme une prédiction raisonnable car il est basé sur des croyances non raisonnables hors sentier d'équilibre.

D'autres raffinements sont proposés dans la littérature afin de rendre raisonnables les croyances en dehors du sentier d'équilibre. Parmi ces raffinements, citons le « critère intuitif » proposé par Cho et Kreps (1987) pour les jeux de signaux.[83]

Pour des modèles ou jeux donnés, on peut prévoir des raffinements spécifiques pour les croyances hors équilibre qui, combinés aux propriétés 1 à 3, permettent de définir le concept d'équilibre bayésien parfait.

Définition : *Un équilibre bayésien parfait pour un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) consiste en un couple de stratégies et de croyances satisfaisant les propriétés 1 à 3 et les raffinements rendant raisonnables les croyances en dehors du sentier d'équilibre.*

5.5. L'équilibre séquentiel et l'équilibre parfait avec «mains tremblantes»

Comme mentionné à la section 5.3, en présence de stratégies complètement mixtes, l'application de la règle de Bayes ne rencontre pas de difficultés. Dans ce cas, les croyances sont cohérentes aux stratégies d'équilibre dans tous les ensembles d'information, qu'ils soient atteints ou non à l'équilibre.

Les deux concepts d'équilibre que sont *l'équilibre séquentiel* et *l'équilibre parfait avec « mains tremblantes »* sont des concepts d'équilibre plus exigeants car ils posent d'emblée que les joueurs jouent des stratégies complètement mixtes, ce qui permet de régler le problème de la cohérence des croyances en dehors du sentier d'équilibre. En effet, l'existence de stratégies complètement mixtes durant tout le jeu implique qu'il n'existe aucun ensemble d'information atteint avec probabilité 0 et donc la règle de Bayes est applicable partout dans le jeu. La justification avancée à l'existence de stratégies complètement mixtes est qu'avec une probabilité non nulle, les joueurs commettent une erreur lors du choix de l'action optimale.[84] En d'autres termes, même si le joueur a bien identifié sa stratégie optimale, il est toujours possible que par erreur, il choisisse une autre stratégie (non optimale). De ce fait,

---

[82] Pour les croyances hors équilibre indiquées dans la figue 5.6, *l* est la meilleure réponse du joueur 2, ce qui à son tour implique que *A* (suivi de *b*) représente la meilleure réponse du joueur 1.
[83] Le « critère intuitif » est développé dans la section 5.6 relative aux jeux de signaux.
[84] Selten, R. (1975). "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games". International Journal of Game Theory. Vol. 4. P 25-55.

tous les ensembles d'information sont atteints avec une probabilité non nulle et la règle de Bayes est applicable à tous les ensembles d'information.

L'équilibre parfait avec « mains tremblantes »

Le critère de la main tremblante a déjà été abordé pour les jeux simultanés.[85] Un équilibre de Nash est ainsi considéré comme une prédiction raisonnable s'il est robuste à la possibilité d'erreur. L'extension de ce critère aux jeux dynamiques consiste à considérer qu'à l'équilibre présumé, même les ensembles d'information hors sentier d'équilibre peuvent être atteints, ceci en raison de l'existence d'une très petite et strictement positive probabilité d'erreur. De ce fait, même les croyances hors sentier d'équilibre peuvent être déterminées par application de la règle de Bayes.

L'équilibre séquentiel

L'équilibre séquentiel a été proposé par Kreps et Wilson (1982) et, tout comme l'équilibre parfait avec « mains tremblantes », il postule d'emblée l'existence de stratégies complètement mixtes.

Définition : Le couple de stratégies et de croyances (σ, μ) *constitue un équilibre séquentiel pour un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) s'il satisfait les deux propriétés suivantes :*

1) *Le profil de stratégies* σ *est séquentiellement rationnel étant donné le système de croyances* μ *.*
2) *Il existe une séquence de stratégies complètement mixtes* $\{\sigma^k\}_{k=1}^{\infty}$ *avec* $\lim_{k\to\infty} \sigma^k = \sigma$ *tel que* $\mu = \lim_{k\to\infty} \mu^k$. *(*$\mu^k$ *représente les croyances déduites du profil de stratégies mixtes* σ^k *par utilisation de la règle de Bayes).*

La première propriété signifie qu'en tout point du jeu, les joueurs choisissent des stratégies optimales étant données le système de croyances et des stratégies des autres joueurs. La seconde propriété postule que le profil de stratégies σ de l'équilibre est la limite d'une séquence de stratégies complètement mixtes. Les croyances associées aux stratégies complètement mixtes de cette séquence sont obtenues par application de la règle de Bayes et leur limite sont les croyances μ de l'équilibre.

5.6. Les jeux de signaux

Les modèles de signaux sont une des applications du concept d'équilibre bayésien parfait. Ils sont très utilisés dans la théorie économique, à l'image du célèbre modèle de Spence (1973) développé pour le marché du travail. Ils sont également très présents en finance corporative par exemple pour l'étude des politiques d'endettement et de distribution de dividendes des entreprises.[86]

---

[85] Voir section 1.5 ci-dessus.

[86] Ross, S (1977). « The Determination of Financial Structure: The Incentive-Signalling Approach ». *The Bell Journal of Economics*, Vol. 8, No. 1, pp. 23-40.
Bhattacharya, S (1979). « Imperfect Information, Dividend Policy, and "The Bird in the Hand" Fallacy ». *The Bell Journal of Economics*, Vol. 10, No. 1, pp. 259-270.

5.6.1. Définition et caractéristiques d'un jeu de signal

Un jeu de signal est un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) dans lequel le joueur 1, appelé l'émetteur, est le joueur qui joue en premier en émettant un message (signal) m_j de l'ensemble des messages possibles $M = \{m_1, \cdots, m_J\}$.[87] Avant de lancer son message, le joueur 1 observe son type t_i de l'ensemble des types possibles $T = \{t_1, \cdots, t_I\}$. La caractéristique privée t_i, observable seulement par le joueur 1, est le résultat d'un tirage aléatoire effectué par la Nature. Le message m_j du joueur 1 dépend de son type t_i, ce qui donne l'expression $m_j(t_i)$ de sa stratégie. En observant le message m_j de l'émetteur et non son type t_i, le joueur 2, appelé le récepteur, choisit une action $a_k(m_j)$ de l'ensemble des actions possibles $A = \{a_1, \cdots, a_K\}$. Les paiements des joueurs dépendent du type t_i de l'émetteur, de son message m_j et de l'action a_k du récepteur. Ils prennent donc la forme $u_1(m_j, a_k, t_i)$ et $u_2(m_j, a_k, t_i)$. Les ensembles T , M et A peuvent être des intervalles continus ou des ensembles discrets. Le déroulement du jeu est le suivant :

1. La Nature procède au tirage du type t_i de l'émetteur à partir de l'ensemble des types possibles $T = \{t_1, \cdots, t_I\}$ selon une distribution de probabilité *a priori* $P(t_i) = \Pr ob(t_i)$ avec $P(t_i) > 0$ pour tout *i* et $P(t_1) + \cdots + P(t_I) = 1$.
2. L'émetteur observe t_i et choisit un message (signal) m_j à partir de l'ensemble des messages possibles $M = \{m_1, \cdots, m_J\}$.
3. Le récepteur observe le message m_j (mais non le type t_i) et choisit une action a_k à partir de l'ensemble des actions possibles $A = \{a_1, \cdots, a_K\}$.
4. Les paiements sont donnés par $u_1(m_j, a_k, t_i)$ et $u_2(m_j, a_k, t_i)$ et le jeu se termine.

La version la plus simple d'un jeu de signal comporte deux joueurs ($i = 1, 2$), deux types possibles de $T = \{t_1, t_2\}$ avec les probabilités (croyances) *a priori* $P(t_1)$ et $P(t_2)$, deux messages (signaux) possibles de $M = \{m_1, m_2\}$ et deux actions possibles de $A = \{a_1, a_2\}$. En recourant à l'une des formes les plus usitées dans la littérature, la figure 5.7 montre la forme extensive d'un tel jeu.

Le jeu tel que représenté par cette forme extensive démarre au milieu avec le mouvement de la Nature et se prolonge vers les nœuds terminaux situés à droite et à gauche. La Nature choisit d'une façon aléatoire le type t_1 ou t_2 du joueur 1 (l'émetteur). Ce dernier observe son type et choisit l'action m_1 ou m_2. Le joueur 2 (le récepteur) observe l'action retenue par le joueur 1 et choisit soit l'action a_1 ou a_2. Les pointillés reliant les nœuds de décision du récepteur expriment l'idée qu'au moment de joueur, le récepteur ne connaît pas le type de l'émetteur.[88]

---

[87] Nous avons vu au chapitre 4 qu'à la suite de Harsanyi, un jeu à information incomplète peut être réinterprété comme étant un jeu dynamique à information imparfaite.

[88] Pour la commodité de la présentation, on a utilisé les traits en pointillés au lieu des ellipses. Ces deux formats jouent le même rôle, c'est-à-dire faire ressortir les ensembles d'information d'un jeu à information imparfaite.

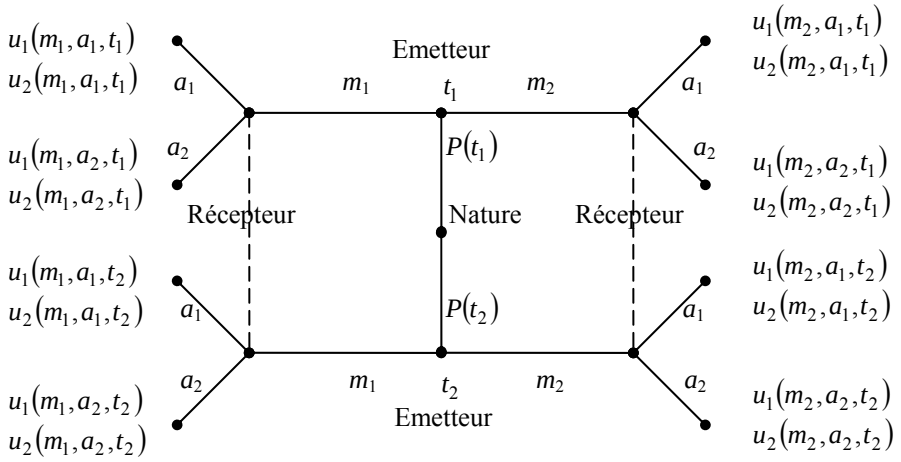


Figure 5.7

5.6.2. L'équilibre bayésien parfait d'un jeu de signal et typologie des équilibres[89]

Rappelons que dans tout jeu, une stratégie d'un joueur est un plan d'actions complet. Une stratégie spécifie donc une action réalisable du joueur en toute circonstance où il peut avoir à intervenir. En conséquence, dans un jeu de signal, une stratégie pure pour l'émetteur est une fonction $m_j(t_i)$ spécifiant quelle est l'action (le message) à choisir pour chaque type que la Nature pourrait tirer. Une stratégie pure pour le récepteur est la fonction $a_k(m_j)$ spécifiant quelle est l'action à choisir pour chaque message que l'émetteur peut envoyer. Dans le jeu de signal simple représenté par la figure 5.7, l'émetteur et le récepteur ont chacun quatre stratégies pures :

Stratégies pures possibles de l'émetteur :

Stratégie (m_1, m_1) : jouer m_1 si la Nature tire t_1 et jouer m_1 si la Nature tire t_2.
Stratégie (m_1, m_2) : jouer m_1 si la Nature tire t_1 et jouer m_2 si la Nature tire t_2.
Stratégie (m_2, m_1) : jouer m_2 si la Nature tire t_1 et jouer m_1 si la Nature tire t_2.
Stratégie (m_2, m_2) : jouer m_2 si la Nature tire t_1 et jouer m_2 si la Nature tire t_2.

Stratégies pures possibles du récepteur :

Stratégie (a_1, a_1) : jouer a_1 si l'émetteur choisit m_1 et jouer a_1 si l'émetteur choisit m_2.
Stratégie (a_1, a_2) : jouer a_1 si l'émetteur choisit m_1 et jouer a_2 si l'émetteur choisit m_2.
Stratégie (a_2, a_1) : jouer a_2 si l'émetteur choisit m_1 et jouer a_1 si l'émetteur choisit m_2.
Stratégie (a_2, a_2) : jouer a_2 si l'émetteur choisit m_1 et jouer a_2 si l'émetteur choisit m_2.

[89] Dans cette section, nous traitons à la fois des équilibres bayésiens parfaits et des équilibres bayésiens parfaits au sens faible, ce qui explique que nous n'ayons pas rajouté le qualificatif « au sens faible » à son titre. Notons que dans un jeu de signal à deux types et à deux messages, l'équilibre séparant ne requiert pas le qualificatif « au sens faible » car dans un tel équilibre, les deux ensembles d'information sont situés sur le sentier d'équilibre.

Les stratégies (m_1, m_1) et (m_2, m_2) de l'émetteur sont appelées des *stratégies mélangeantes* (*pooling*) car les deux types envoient le même message. Les stratégies (m_1, m_2) et (m_2, m_1) sont appelées des *stratégies séparantes* (*separating*) car chaque type envoie un message différent. Pour des modèles comprenant plus de deux types, on peut avoir des stratégies partiellement séparantes (semi-separating) si tous les types d'un certain ensemble de types envoient le même message et chaque ensemble de types envoie un message différent. Un équilibre séparant est un équilibre révélateur car à partir du message différencié envoyé, on peut déduire le type de l'émetteur. Un équilibre séparant permet donc de *transmettre de l'information*.

Le jeu de signal étant un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite), le concept d'équilibre adéquat est donc l'équilibre bayésien parfait. Après adaptation des propriétés exposées dans les sections 5.3 et 5.4, l'équilibre bayésien parfait pour un jeu de signal est défini comme suit :

Définition : Un équilibre bayésien parfait pour un jeu de signal est représenté par les stratégies $m_j^*(t_i)$ et $a_k^*(m_j)$ respectivement de l'émetteur et du récepteur et les croyances *a posteriori* $\mu(t_i / m_j)$ du récepteur avec $\mu(t_i / m_j) \geq 0$ pour tout $t_i \in T$ et $\sum_{t_i \in T} \mu(t_i / m_j) = 1$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1) Pour tout t_i, le message $m_j^*(t_i)$ doit maximiser l'utilité de t_i étant donnée la stratégie optimale $a_k^*(m_j)$ du récepteur. La stratégie $m_j^*(t_i)$ est donc la solution de $\underset{m_j}{Max}\ u_1(m_j, a_k^*(m_j), t_i)$.[90]
2) Pour tout message m_j du joueur 1 (l'émetteur), l'action $a_k^*(m_j)$ du joueur 2 (le récepteur) doit maximiser son espérance d'utilité étant données ses croyances $\mu(t_i / m_j)$ sur le type t_i ayant envoyé le message m_j. La stratégie $a_k^*(m_j)$ est donc la solution de $\underset{a_k}{Max} \sum_{t_i} \mu(t_i / m_j) u_2(m_j, a_k, t_i)$.
3) Les croyances $\mu(t_i / m_j)$ découlent des probabilités *a priori* et de la stratégie d'équilibre $m_j^*(\cdot)$ par application de la règle de Bayes (lorsqu'elle s'applique). Ainsi, si H_m est l'ensemble d'information atteint avec probabilité strictement positive étant donnée la stratégie d'équilibre *m*, alors les croyances du récepteur découlent de la formule de Bayes et de la stratégie de l'émetteur, soit $\mu(t_i / H_m) = \dfrac{P(t_i)}{P(H_m)} = \dfrac{P(t_i)}{\sum_{t_i' \in H_m} P(t_i')}$ avec $P(H_m) > 0$.

Comme exemple de détermination de(s) l'équilibre(s) bayésien(s) parfait(s), considérons le jeu de signal décrit à la figure 5.8, dans lequel l'émetteur (le joueur 1) peut être soit du type t_1 soit du type t_2. Le type du joueur 1 est le résultat d'un tirage aléatoire de la Nature.

[90] Cette formulation montre que le joueur 1 (l'émetteur) prend une décision optimale en anticipant une réaction optimale du joueur 2 (le récepteur). C'est une démarche analogue à celle du modèle de Stackelberg (1934) car pour l'émetteur, le récepteur est un joueur rationnel et ce dernier sait que l'émetteur sait qu'il est rationnel, …

Supposons que chacun des deux types soit équiprobable. Après observation de son type, l'émetteur (le joueur 1) choisit une action qui peut être soit *L* soit *R*. Le récepteur (le joueur 2) observe le message de l'émetteur et non son type et choisit à son tour une action qui peut être soit *u* soit *d*. Il s'agit bien d'un jeu de signal dans lequel l'émetteur choisit un message en fonction de son type et le récepteur révise ses croyances sur le type de l'émetteur sur la base de l'action observée de l'émetteur et choisit une action optimale en fonction, notamment, des croyances révisées. On peut représenter ce jeu par la forme extensive suivante :

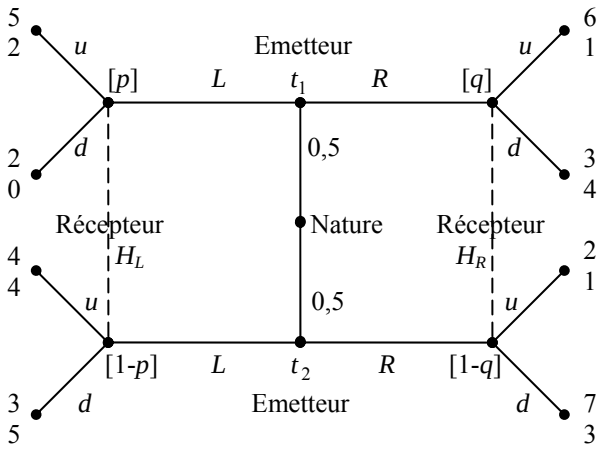


Figure 5.8

On désignera par $p = \mu(t_1/L)$, $1-p = \mu(t_2/L)$, $q = \mu(t_1/R)$ et $1-q = \mu(t_2/R)$ les croyances *a posteriori* bayésiennes du récepteur à ses ensembles d'information.[91] L'identification des équilibres bayésiens parfaits consiste à postuler un équilibre et à vérifier si aucun joueur n'a intérêt à dévier de cet équilibre présumé. En stratégies pures, dans ce jeu, il peut exister quatre types d'équilibre :

- Equilibre mélangeant en *L* avec t_1 et t_2 jouant *L* ;
- Equilibre mélangeant en *R* avec t_1 et t_2 jouant *R* ;
- Equilibre séparant avec t_1 jouant *L* et t_2 jouant *R* ;
- Equilibre séparant avec t_1 jouant *R* et t_2 jouant *L*.

(L, L) : Equilibre mélangeant en *L* : Commençons par analyser la possibilité d'existence d'un équilibre bayésien parfait mélangeant en *L*, c'est-à-dire d'un équilibre bayésien parfait dans lequel l'émetteur joue la stratégie mélangeante (L, L) qui signifie $(L/t_1, L/t_2)$. Etant donnée cette stratégie (L, L), l'ensemble d'information H_L se trouve donc sur le sentier d'équilibre. Il est atteint avec probabilité 1. Le récepteur observe le message *L* qui peut ainsi provenir soit du type t_1 soit du type t_2. Les croyances *a posteriori* du récepteur doivent être cohérentes avec la stratégie de l'émetteur et sont déterminées par application de la règle de Bayes, ce qui donne :

$$p = \mu(t_1/L) = \frac{\Pr ob(t_1)}{\Pr ob(H_L)} = \frac{\Pr ob(t_1)}{\Pr ob(t_1) + \Pr ob(t_2)} = \frac{1}{2}$$

[91] $P(t_1)$ et $P(t_2)$ représentent les probabilités *a priori* et p, $1-p$, q et $1-q$ les probabilités *a posteriori*.

$$1-p=\mu(t_2/L)=\frac{\Pr ob(t_2)}{\Pr ob(H_L)}=\frac{\Pr ob(t_2)}{\Pr ob(t_1)+\Pr ob(t_2)}=\frac{1}{2}$$

En d'autres termes, en observant le message *L* dans tous les cas (c'est-à-dire quelque soit le type de l'émetteur), le récepteur ne reçoit aucune nouvelle information et maintient donc ses croyances. Ses croyances *a posteriori* sont ainsi identiques à ses croyances *a priori*.

Quelle est la meilleure réponse du joueur 2 (récepteur) ? Etant données la stratégie (L, L) et les croyances *a posteriori* $(p, 1-p)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, la meilleure réponse du récepteur est l'action *u* car $E(u_2(u/L))=2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2}=3>E(u_2(d/L))=0\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. Avec cette meilleure réaction (u/L), l'émetteur obtient un paiement de 5 s'il est du type t_1 et de 4 s'il est du type t_2.

Etant donnés ces paiements de 5 et de 4, les types t_1 et t_2 de l'émetteur ont-ils intérêt à dévier et jouer l'action *R* au lieu de l'action *L* ? Pour le savoir, il faut considérer la réaction du récepteur au message *R* et les paiements qui s'en suivent pour le joueur 1. Dans ce jeu, pour le récepteur, étant donné *R*, l'action *u* est dominée par l'action *d*. En conséquence, si le joueur 1 venait à joueur *R*, la meilleure réponse du joueur 2 sera l'action *d*, ce qui donne un paiement de 3 et 7 respectivement aux types t_1 et t_2 de l'émetteur. Le type t_2 est incité à dévier car il obtient un paiement supérieur (7 au lieu de 4). Par conséquent, il ne peut exister d'équilibre bayésien parfait dans lequel l'émetteur joue la stratégie $(L/t_1, L/t_2)$.

Notons que cette conclusion est vraie quelque soient les *croyances hors équilibre* $(q, 1-q)$ du récepteur car si ce dernier venait à observer l'action hors équilibre *R*, sa meilleure réponse est *toujours* l'action *d* car elle domine strictement l'action *u*.[92]

(R, R) : Equilibre mélangeant en *R* : Nous vérifions maintenant l'existence d'un équilibre bayésien parfait mélangeant en *R*, c'est-à-dire un équilibre dans lequel l'émetteur joue la stratégie mélangeante en *R*, qui signifie $(R/t_1, R/t_2)$. Dans cet équilibre présumé, l'ensemble d'information H_R est situé sur le sentier d'équilibre comme le montre la figure 5.9. Il est atteint avec probabilité 1.

[92] L'action *R* est hors équilibre pour l'équilibre bayésien parfait postulé dans lequel la stratégie du joueur 1 est (L, L).

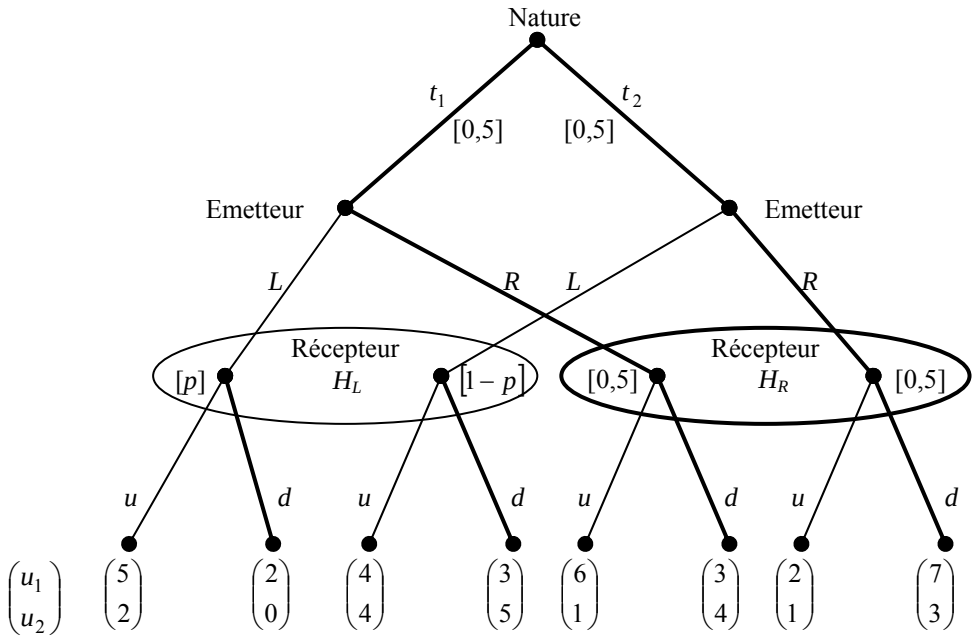


Figure 5.9

Le récepteur observe le message R qui peut provenir soit du type t_1 soit du type t_2. Ses croyances cohérentes avec la stratégie de l'émetteur sont déterminées par application de la règle de Bayes, ce qui donne :

$$q = \mu(t_1 / R) = \frac{\Pr ob(t_1)}{\Pr ob(H_R)} = \frac{\Pr ob(t_1)}{\Pr ob(t_1) + \Pr ob(t_2)} = \frac{1}{2}$$

$$1 - q = \mu(t_2 / R) = \frac{\Pr ob(t_2)}{\Pr ob(H_R)} = \frac{\Pr ob(t_2)}{\Pr ob(t_1) + \Pr ob(t_2)} = \frac{1}{2}$$

En d'autres termes, en observant le message R dans tous les cas (c'est-à-dire quelque soit le type de l'émetteur), le récepteur ne reçoit aucune nouvelle information. Ses croyances *a posteriori* sont donc identiques à ses croyances *a priori*.

Quelle est la meilleure réponse du récepteur ? Etant données la stratégie $(R/t_1, R/t_2)$ et les croyances *a posteriori* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, la meilleure réponse du joueur 2 est l'action d car $E(u_2(d/R)) = 4 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ > $E(u_2(u/R)) = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 1$.[93] Avec cette meilleure réponse (d/R), le joueur 1 obtient un paiement de 3 s'il est du type t_1 et de 7 s'il est du type t_2.

[93] En fait, comme indiqué précédemment, on a $E(u_2(d/R)) > E(u_2(u/R))$ quelque soient les croyances du joueur 2. L'action d si R domine strictement l'action u si R.

Etant donnés ces paiements, les types t_1 et t_2 ont-ils intérêt à dévier de la stratégie *R* ? Pour le savoir, il faut considérer la réaction du récepteur s'il venait à observer le message *L*. Si le récepteur choisit l'action *u*, alors le type t_1 obtiendra un paiement de 5, supérieur au paiement de 3 qu'il aurait obtenu s'il avait choisi l'action *R*. Le type t_1 étant incité à dévier, il ne peut donc exister d'équilibre bayésien parfait mélangeant en *R* où le joueur 2 choisit l'action *u* après observation de *L*. Par contre, si le joueur 2 choisit l'action *d*, alors les deux types obtiendront des paiements inférieurs respectivement égaux à 2 et à 3. Dans ce cas, aucun des deux types n'est incité à dévier de l'action *R*. Il reste à déterminer les *croyances hors sentier d'équilibre p* et $(1-p)$ pour que le joueur 2 choisisse l'action *d*. L'action *d* est le meilleur choix du joueur 2 si $E(u_2(d/L)) > E(u_2(u/L))$, soit si $0\times p+5\times(1-p) > 2\times p+4\times(1-p)$, soit si $p<\frac{1}{3}$. Il existe donc bien un équilibre bayésien parfait au sens faible mélangeant en *R* et qui est $\left[(R,R),(d,d);\, q=\frac{1}{2},\, p\right]$ avec $p<\frac{1}{3}$.

(L, R) : Equilibre séparant où le type t_1 joue *L* et le type t_2 joue *R* : Nous vérifions maintenant l'existence d'un équilibre bayésien parfait séparant dans lequel l'émetteur joue la stratégie séparante $(L/t_1, R/t_2)$. Dans cet équilibre présumé, les deux ensembles d'information H_L et H_R sont situés sur le sentier d'équilibre, comme le montre la figure 5.10.[94] S'il existe, l'équilibre bayésien parfait ne nécessite pas la qualification « au sens faible » car il ne comprend pas d'ensembles d'information hors équilibre.

Les croyances du récepteur doivent être cohérentes avec la stratégie de l'émetteur et sont déterminées par application de la règle de Bayes, ce qui donne $p=\mu(t_1/L)=1$ et $1-q=\mu(t_2/R)=1$. En effet, si le récepteur considère que l'émetteur joue (L, R), alors il doit croire qu'il s'agit bien du type t_1 s'il observe *L* et qu'il s'agit bien du type t_2 s'il observe *R*. Ces croyances sont le résultat de l'application de la règle de Bayes avec la particularité suivante : si l'émetteur joue (L, R), le récepteur fait face à deux ensembles d'information *singletons*. Le premier contient le nœud *L* et découle de t_1, d'où la croyance $p=\mu(t_1/L)=1$, cohérente avec la stratégie d'équilibre.[95] Le second ensemble d'information, un singleton également, contient le nœud *R* et découle de t_2, d'où la croyance $1-q=\mu(t_2/R)=1$, cohérente avec la stratégie d'équilibre. Pour ces croyances, la meilleure réponse du récepteur est la stratégie $(u/L, d/R)$. En effet, après observation du message *L*, le récepteur obtient un paiement de 2 s'il joue *u* et de 0 s'il joue *d*. De même, en observant le message *R*, le récepteur obtient un paiement de 1 s'il joue *u* et de 3 s'il joue *d*. Avec cette meilleure réponse du récepteur, l'émetteur obtient un paiement de 5 s'il est du type t_1 et de 7 s'il est du type t_2.

[94] Les nombres entre crochets au sein des ensembles d'information représentent les croyances *a posteriori*.
[95] Il s'agit évidemment à ce stade d'un équilibre présumé.

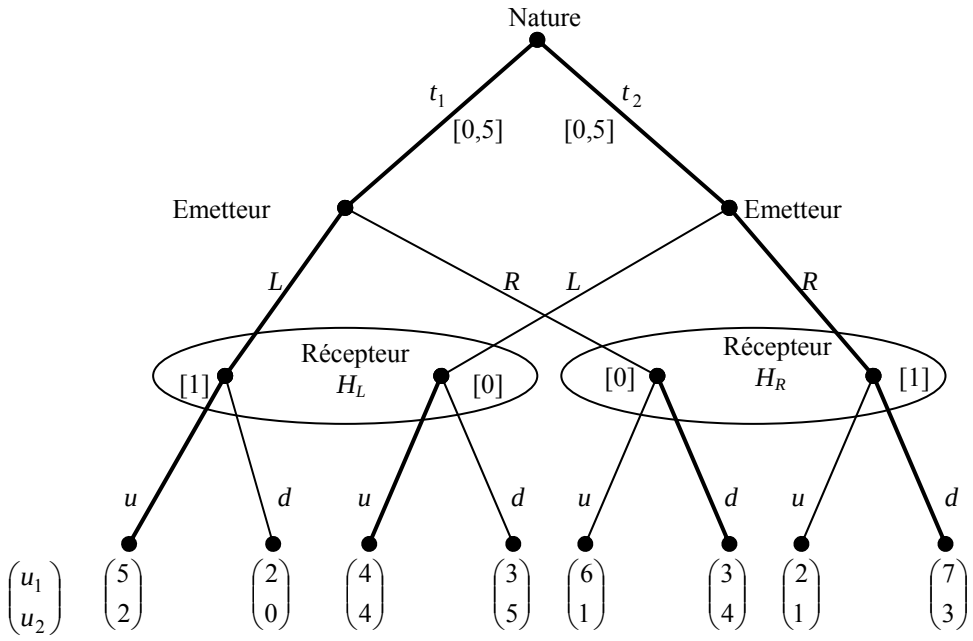


Figure 5.10

Nous devons vérifier si la stratégie $(L/t_1, R/t_2)$ constitue bien une meilleure réponse de l'émetteur à la meilleure réponse $(u/L, d/R)$. Si le type t_1 dévie et joue l'action *R*, alors compte tenu de la meilleure réponse de l'émetteur $(u/L, d/R)$, il obtiendra un paiement de 3, inférieur au paiement de 5 qu'il aurait obtenu avec la stratégie $(L/t_1, R/t_2)$. Le type t_1 n'est donc pas incité à dévier. Si le type t_2 dévie et joue l'action *L*, alors compte tenu de la meilleure réponse de l'émetteur $(u/L, d/R)$, il obtiendra un paiement de 4, inférieur au paiement de 7 qu'il aurait obtenu avec la stratégie $(L/t_1, R/t_2)$. Comme pour le type t_1, le type t_2 n'a pas intérêt à dévier et on a donc bien un équilibre bayésien parfait séparant $[(L, R), (u, d);\ p = 1, q = 0]$.

(R, L) : Equilibre séparant où le type t_1 joue *R* et le type t_2 joue *L* : Vérifions maintenant s'il existe un équilibre bayésien parfait séparant dans lequel le joueur 1 choisit la stratégie séparante $(R/t_1, L/t_2)$. Dans ce cas, les deux ensembles d'information H_L et H_R du récepteur sont situés sur le sentier d'équilibre.

Les croyances du récepteur doivent être cohérentes avec la stratégie de l'émetteur et sont déterminées par application de la règle de Bayes, ce qui donne $q = \mu(t_1/R) = 1$ et $1 - p = \mu(t_2/L) = 1$. Comme l'émetteur joue (R, L), le récepteur fait face à deux ensembles d'information *singletons*. Le premier contient le nœud *R* et découle du type t_1 d'où la croyance $q = \mu(t_1/R) = 1$, cohérente avec la stratégie d'équilibre postulé. Le second ensemble d'information contient le nœud *L* et découle du type t_2, d'où la croyance $1 - p = \mu(t_2/L) = 1$, cohérente avec la stratégie d'équilibre postulé. Pour ces croyances, la meilleure réponse du récepteur est la stratégie $(d/R, d/L)$. En effet, après observation du message *R*, le récepteur obtient 4 en jouant *d* et 1 en jouant *u*, d'où l'optimalité de (d/R). De même, en observant le

message L, le joueur 2 obtient 5 en jouant d et 4 en jouant u, d'où l'optimalité de (d/L). Avec cette meilleure réponse du joueur 2, le joueur 1 obtient un paiement de 3 qu'il soit du type t_1 ou t_2.

Nous devons maintenant nous assurer que la stratégie $(R/t_1, L/t_2)$ constitue bien une meilleure réponse de l'émetteur à la meilleure réponse $(d/R, d/L)$ du récepteur. Si le type t_1 dévie et joue L, alors compte tenu de la meilleure réponse $(d/R, d/L)$ du joueur 2, il obtiendra un paiement de 2, inférieur au paiement de 3 s'il joue R. Le type t_1 n'est donc pas incité à dévier. Si le type t_2 dévie et joue R, alors compte tenu de la meilleure réponse du joueur 2, il obtiendra un paiement de 7, supérieur au paiement de 3 qu'il aurait obtenu en jouant L. Le type t_2 est donc incité à dévier de ce supposé équilibre. En conséquence, la stratégie $(R/t_1, L/t_2)$ ne peut faire partie d'un équilibre bayésien parfait.

Dans ce jeu, il existe donc deux équilibres bayésiens parfaits, un équilibre mélangeant et un équilibre séparant. L'existence de plusieurs équilibres est problématique car on ne peut prédire l'issue du jeu. Le problème de la multiplicité des équilibres dans un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) est en grande partie dû à l'imprécision des conditions concernant les croyances hors équilibre. D'ailleurs, dans le jeu de signal ci-dessus, l'équilibre bayésien parfait au sens faible mélangeant en L n'est en fait un équilibre que pour les croyances hors équilibre $p = \mu(t_1 / L) < \frac{1}{3}$. Or, aucun argument rationnel n'est venu étayer ces croyances hors équilibre. C'est pour cela qu'une partie importante de la littérature relative à la théorie des jeux traite de la question des raffinements de l'équilibre de Nash. L'objectif de ces raffinements est d'imposer aux croyances hors équilibres des propriétés raisonnables avec pour finalité d'identifier un seul équilibre pour les jeux étudiés.

D'ailleurs, en appliquant le critère intuitif de Cho et Kreps (1987), nous montrerons que l'équilibre bayésien parfait au sens faible mélangeant en R ne peut être accepté car il est basé sur des croyances hors équilibre non raisonnables. De ce fait, le jeu de la figure 5.8 n'admet qu'un seul équilibre, l'équilibre bayésien parfait séparant $[(L, R), (u, d);\ p = 1, q = 0]$.

5.6.3. Raffinements des équilibres d'un jeu de signal

Si le message m' est hors sentier d'équilibre, la règle de Bayes n'est pas applicable et ne pose donc aucune restriction particulière sur la croyance $\mu(t/m')$. Mais n'importe quelle croyance ne peut pour autant être acceptée. Les raffinements des équilibres des jeux dynamiques à information incomplète sont des exigences supplémentaires visant à rendre crédibles et raisonnables ces croyances. Par conséquent, un équilibre bayésien parfait ayant des croyances hors équilibre non raisonnables ne peut être considéré comme une prédiction acceptable. Ces raffinements permettent ainsi d'écarter les équilibres qui ne paraissent pas raisonnables, ce qui réduit le nombre de ces équilibres. Par exemple, dans le modèle de signal à deux types de Spence, le critère de domination par l'équilibre et le critère intuitif permettent d'écarter tous

les équilibres bayésiens parfaits sauf l'équilibre séparant où le travailleur de type t_L choisit un niveau d'éducation égal à 0 et le travailleur de type t_H choisit le niveau d'éducation $\underline{e}$.[96]

Le critère de domination

Définition : *Le message m' est une action dominée pour le type t s'il existe un autre message m tel que le paiement maximal obtenu par t jouant m' est inférieur au paiement minimal obtenu par t jouant m, soit si $\underset{a}{Max}\ u_1(m', a, t) < \underset{a}{Min}\ u_1(m, a, t)$.*[97]

Selon ce critère de raffinement, si le message m' est une action dominée pour le type *t*, alors la croyance raisonnable du récepteur, s'il venait à observer le message m', est une probabilité *a posteriori* nulle du type *t*, soit $\mu(t/m') = 0$. Ce critère de raffinement peut être renforcé en considérant qu'en réponse à la combinaison (T, m) ou (T, m'), le récepteur ne choisira pas n'importe quelle action a, mais jouera la meilleure action $b(T, \cdot)$ pour des croyances données. En conséquence, on dira que le message m' est une action dominée pour le type *t* s'il existe un autre message *m* tel que $\underset{a \in b(T, m')}{Max}\ u_1(m', a, t) < \underset{a \in b(T, m)}{Min}\ u_1(m, a, t)$.

Il peut exister plusieurs types pour lesquels le message m' est dominé. Soit $S(m')$ l'ensemble de ces types. Alors la croyance raisonnable devient $\sum_{t \in S(m')} \mu(t/m') = 0$. Pour le message hors sentier d'équilibre m', on doit donc raisonnablement mettre tout le poids sur les types t' appartenant à T mais n'appartenant pas à $S(m')$, ce qui donne $\mu(t'/m') > 0$ pour tout $t' \in T - S(m')$ (en supposant que l'ensemble $T - S(m')$ soit non vide). L'ensemble $T - S(m')$ est donc l'ensemble des types t' pour lesquels le message m' n'est pas dominé.[98]

Dans le modèle de signal à deux types de Spence par exemple, le renforcement du critère de domination permet d'éliminer tous les équilibres séparants sauf l'équilibre séparant où $e_L^* = 0$ et $e_H^* = \underline{e}$. Ce critère ne permet cependant pas d'écarter tous les équilibres mélangeants.[99]

Le critère de domination par l'équilibre

Le raffinement basé sur le critère de domination peut être insuffisant pour écarter tous les équilibres bayésiens parfaits au sens faible qui paraissent non raisonnables. Pour réduire encore plus ces types d'équilibres, on peut recourir au critère de la domination par l'équilibre qui est un critère plus exigeant que le critère de domination.

Définition : *Considérons un équilibre bayésien parfait postulé pour un jeu de signal et soit $u_1^*(t)$ le paiement obtenu par l'émetteur de type t à cet équilibre. Un message m' hors sentier*

---

[96] Voir chapitre 8 relatif au modèle de signal de Spence (1974).
[97] Cho, I-K et D. Kreps (1987). Signaling game and stable equilibria. Quarterly Journal of Economics. Volume 102, pages 179-221.
Voir aussi Mas-Colell, A, M.D. Whinston and J.R. Green (1995), page 467.
[98] Dans le langage de la théorie des ensembles, il s'agit du complément de l'ensemble $S(m')$ par rapport à l'ensemble *T*.
[99] Voir chapitre 8 relatif au modèle de signal de Spence (1974).

d'équilibre est dominé par l'équilibre pour le type t de l'émetteur si le plus grand paiement possible pour le type t jouant m' est inférieur au paiement $u_1^*(t)$, soit si $\underset{a}{Max}\ u_1(m', a, t) < u_1^*(t)$.

Ce critère se base sur l'idée selon laquelle si un équilibre donné est postulé, alors à cet équilibre, les joueurs (en particulier le récepteur) doivent croire que le type t n'a aucune incitation à choisir un message m' dominé par l'équilibre. Le critère de domination par l'équilibre peut être renforcé en considérant qu'en réponse à la combinaison (T, m'), le récepteur ne choisira pas n'importe quelle action a, mais jouera la meilleure action pour des croyances données. En conséquence, un message m' hors sentier d'équilibre est dominé par l'équilibre pour le type t si $\underset{a \in b(T, m')}{Max}\ u_1(m', a, t) < u_1^*(t)$. Il peut exister plusieurs types pour lesquels le message m' est dominé par l'équilibre. Soit $S^*(m')$ l'ensemble de ces types.

Selon ce critère de raffinement, il n'est donc pas raisonnable que l'équilibre postulé comprenne une croyance du récepteur affectant une probabilité strictement positive au type t s'il venait à observer le message m'. La croyance raisonnable du récepteur est donc d'affecter une probabilité nulle à la possibilité que le type t choisisse le message m', soit $\mu(t/m') = 0$ pour tout $t \in S^*(m')$. Pour le message hors sentier d'équilibre m', on doit donc raisonnablement mettre tout le poids sur les types t' appartenant à T mais n'appartenant pas à $S^*(m')$, ce qui donne $\mu(t'/m') > 0$ pour tout $t' \in T - S^*(m')$ avec $\sum_{t' \in T - S^*(m')} \mu(t'/m') = 1$ (en supposant que l'ensemble $T - S^*(m')$ soit non vide). L'ensemble $T - S^*(m')$ est donc l'ensemble des types t' pour lesquels le message m' n'est pas dominé par l'équilibre.

Dans le modèle de signal de Spence à deux types, le critère de domination par l'équilibre permet d'écarter tous les équilibres séparants sauf l'équilibre séparant où $e_L^* = 0$ et $e_H^* = \underline{e}$, ce qui peut être considéré comme une simple conséquence au fait que le critère de domination par l'équilibre est plus exigeant que le critère de domination. Ce critère permet également d'écarter tous les équilibres mélangeants.[100]

Le critère intuitif

Dans certains jeux, le critère de domination par l'équilibre ne permet pas d'écarter tous les équilibres non raisonnables. Cho et Kreps (1987) ont proposé le « critère intuitif » qui est un raffinement plus exigeant que les raffinements précédents.[101] Considérons un message m' hors sentier d'équilibre et soit $S^*(m')$ l'ensemble des types pour lesquels le message m' est dominé par l'équilibre. La croyance raisonnable à cet équilibre est donc $\sum_{t' \in T - S^*(m')} \mu(t'/m') = 1$. On dira que l'équilibre bayésien parfait postulé ne satisfait pas au critère intuitif, si pour le message m', il existe un type $t' \in T - S^*(m')$ tel que :

$$u^*(t') < \underset{a \in b(T - S^*(m'), m')}{Min} u_1(m', a, t')$$

[100] Voir chapitre 8 relatif au modèle de signal de Spence (1974).
[101] Cho, I-K et D. Kreps (1987), Page 202.

Le type t' étant incité à dévier vers le message hors équilibre m', l'équilibre bayésien parfait postulé ne peut être considéré comme une prédiction raisonnable.

Pour simplifier l'exposé du critère intuitif, considérons un jeu de signal avec deux type t et t' et deux messages m et m' et que ce jeu admette un équilibre mélangeant dans lequel les deux types choisissent le message m avec des croyances hors équilibre le soutenant. Supposons qu'à cet équilibre, pour le type t, le message hors équilibre m' est dominé par l'équilibre. Le paiement obtenu à cet équilibre par le type t est donc supérieur au plus grand paiement qu'il pourrait obtenir en déviant vers le message m' et ce quelque soit les croyances hors équilibre du récepteur. Si le récepteur venait à observer le message m', sa croyance raisonnable est donc d'affecter toute la probabilité au type t', soit $\mu(t'/m')=1$. Si en conséquence à cette croyance, la meilleure réaction du récepteur au message m' permet au type t' d'obtenir un paiement supérieur à son paiement à l'équilibre, l'incitant ainsi à dévier, alors l'équilibre postulé est à écarter sur la base du critère intuitif.

Ainsi, un équilibre bayésien parfait est à écarter sur la base du critère intuitif, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1) Quelque soient ses croyances hors sentier d'équilibre, la meilleure réaction du récepteur au message hors équilibre implique une réduction du paiement du type t par rapport à l'équilibre ;
2) Etant donnée la croyance raisonnable $\mu(t'/m')=1$ résultant de cette première condition, la meilleure réaction du récepteur au message m' implique l'accroissement du paiement du type t' par rapport à l'équilibre.

A titre d'illustration de l'utilisation du critère intuitif, reconsidérons l'équilibre bayésien parfait au sens faible mélangeant $\left[(R,R),(d,d);q=\frac{1}{2},p\right]$ avec $p<\frac{1}{3}$ décrit dans la figure 5.9. Au regard du critère intuitif, cet équilibre n'est pas une prédiction raisonnable car il comprend une croyance non raisonnable. On remarque en effet que pour le type t_2, le message L est dominée par l'équilibre car le meilleur paiement obtenu en jouant L (soit 4) est inférieur au paiement obtenu à l'équilibre en jouant R (soit 7). La croyance raisonnable qui en résulte est $\mu(t_2/L)=0$. Donc, si le récepteur venait à observer le message hors équilibre L, la seule croyance raisonnable est d'affecter tout le poids au type t_1, soit $\mu(t_1/L)=1$. Ceci implique que la meilleure réponse du joueur 2 au message hors équilibre L est l'action u. De ce fait, le type t_1 obtiendra un paiement de 5, supérieur au paiement de 3 obtenu à l'équilibre présumé. Le type t_1 étant incité à dévier, l'équilibre bayésien parfait a sens faible $\left[(R,R),(d,d);q=\frac{1}{2},p\right]$ avec $p<\frac{1}{3}$ n'est pas une prédiction raisonnable, et ce en application du critère intuitif.

En conséquence, le jeu de la figure 5.8 admet un seul équilibre bayésien parfait et qui est $[(L,R),(u,d);p=1,q=0]$.

Deuxième Partie : Modèles de l’économie de l’information

Chapitre 6 : Le phénomène de sélection adverse

La théorie économique standard a accordé un rôle explicite peu important à l'information. Dans le modèle de l'équilibre général par exemple, l'hypothèse généralement admise est celle de l'information parfaite, c'est-à-dire une situation dans laquelle l'information pertinente est semblablement disponible sans délai et sans coût pour tous les agents économiques concernés.[102] Les économistes étaient évidemment conscients que cette hypothèse de l'information parfaite pouvait dans certains cas contredire profondément la réalité. Par exemple, lors de l'acquisition du contrôle d'une entreprise, l'information joue un rôle fondamental.

Nous présentons dans ce chapitre la contribution majeure de G. Akerlof (1970) qui a fourni une première analyse formelle de l'importance de l'information dans les mécanismes de marché.[103] Il a considéré les questions de la détermination du prix d'équilibre et du volume des échanges dans un marché où existe une asymétrie d'information entre les acheteurs et les vendeurs. Sa contribution capitale a été de montrer qu'en l'absence de l'hypothèse de l'information parfaite, certaines conclusions majeures de la théorie économique standard peuvent être remises en cause, notamment celles relatives à l'équilibre de marché, au bien-être des consommateurs et au développement des échanges.

En considérant à titre illustratif l'exemple du marché des voitures d'occasion, la caractéristique centrale introduite par Akerlof est celle de l'asymétrie de l'information existant entre l'acheteur et le vendeur, les vendeurs étant mieux informés que les acheteurs sur les caractéristiques de l'objet de la vente. Cet exemple est assez éloquent car lors de l'achat d'une voiture d'occasion, l'acheteur est généralement confronté au problème de l'incertitude sur la qualité de la voiture. Akerlof a ainsi montré que l'existence de cette asymétrie de l'information sur la qualité des biens en vente peut provoquer l'exclusion du marché des biens de bonne qualité et le maintien des biens de mauvaise qualité.

L'impossibilité pour les acheteurs de distinguer les biens de bonne qualité des biens de mauvaise qualité ne permet pas l'émergence d'un système de prix différenciés selon le niveau de qualité. En raison de la non observabilité de la qualité, le prix de marché d'un bien devient indépendant de sa qualité. L'existence d'un même prix pour plusieurs niveaux de qualité représente en fait une sous-évaluation des biens de bonne qualité et une surévaluation des biens de mauvaise qualité. Cette situation déclenche un processus de réactions dans lequel, pour un prix donné, les vendeurs de biens de bonne qualité se retirent du marché. A l'équilibre, ne restent que les biens de mauvaise qualité et les quantités échangées sont inférieures à celles du cas de l'information parfaite.

C'est le phénomène de *sélection adverse* défini comme étant la situation dans laquelle la partie informée (les vendeurs dans l'exemple du marché des voitures d'occasion) en se basant sur l'information détenue de façon privée (ici, la qualité de la voiture d'occasion) prennent des décisions de transactions (ici, vendre les mauvaises voitures d'occasion et ne pas vendre les bonnes voitures d'occasion) qui affectent de façon négative (adverse) le bien-être de la

[102] Debreu, G. (1959). Theory of Value. New York, Wiley.
[103] Akerlof, G. (1970). « The market for lemons : Quality uncertainty and the market mechanism. » *Quarterly Journal of Economics*. Vol. 89, P 488-500.

partie non informée (ici, les acheteurs) et d'un segment de la partie informée (ici, les vendeurs de biens de bonne qualité).

6.1. L'asymétrie de l'information et le modèle de sélection adverse de Akerlof

La modélisation de l'asymétrie de l'information consiste dans un premier temps à considérer que pour l'acheteur, la qualité de la voiture est une caractéristique non observable. Dans ce cas, la qualité est une variable aléatoire. Dans son article pionnier, Akerlof (1970) considère que la qualité q des voitures d'occasion est une variable aléatoire continue distribuée de façon uniforme entre 0 et 2. Une voiture de qualité $q = 0$ (respectivement $q = 2$) est donc de la plus mauvaise (respectivement meilleure) qualité. Notons que la qualité moyenne des voitures d'occasion μ est alors égale à $\mu = \int_0^2 q \cdot f(q) \cdot dq = \int_0^2 q \cdot \frac{1}{2} \cdot dq = 1$.[104] Pour l'acheteur, la qualité non observable de la voiture d'occasion est donc représentée par la distribution de probabilité qui apparaît à la figure 6.1 :

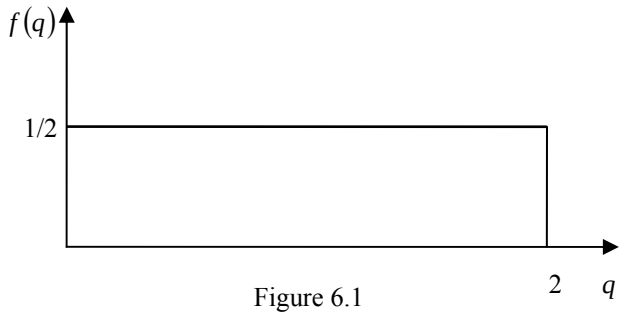


Figure 6.1

Pour analyser les effets de l'asymétrie de l'information sur le fonctionnement du marché, Akerlof considère qu'il existe deux groupes d'individus : un groupe *A* possédant *N* voitures d'occasion et un groupe *B* ne possédant pas de voitures d'occasion. Pour déterminer l'issue du marché en situation d'asymétrie d'information, l'analyse porte sur le comportement de demande et d'offre des deux catégories d'individus et leur confrontation sur le marché.

La demande

La demande de voitures d'occasion peut émaner des deux groupes d'individus et est donc la somme des demandes des deux groupes.[105] Soient Y_A et Y_B le revenu consacré à l'achat de voitures d'occasion des groupes *A* et *B* respectivement. Lors de l'achat d'une voiture d'occasion, l'acheteur base sa décision sur la comparaison de deux éléments, le prix et la disposition à payer, cette dernière dépendant notamment de la qualité du bien. Pour une

---

[104] Rappelons que pour une distribution de probabilité uniforme $U(a, b)$, l'espérance mathématique est $\frac{a+b}{2}$.

[105] Akerlof considère que la fonction d'utilité des individus des groupes *A* et *B* est respectivement $U_A = M + \sum_i 1 \cdot q_i$ et $U_B = M + \sum_i (3/2) \cdot q_i$ avec *M* représentant l'utilité procurée par la consommation des biens autres que les voitures d'occasion.

qualité q donnée, considérons que les individus du groupe A ont une disposition à payer de $1 \cdot q$ et les individus du groupe B une disposition à payer de $(3/2) \cdot q$.[106] Ainsi, pour une qualité donnée q, l'individu du groupe A n'exprime une demande positive que si le prix p est inférieure à sa disposition à payer, c'est-à-dire si $p < 1 \cdot q$. Les individus du groupe B n'exprime une demande positive que si le prix p est tel que $p < \frac{3}{2} \cdot q$. Mais la difficulté réside ici dans le fait que la qualité n'est pas observable pour l'acheteur. Ce dernier doit donc baser sa décision sur une approximation de la qualité. Celle-ci est souvent la qualité moyenne μ qui est généralement le résultat de croyances basées sur l'expérience et l'observation passées.

En conséquence, il y'a une demande positive pour le groupe A et pour le groupe B lorsque le prix est inférieur à la disposition à payer, celle-ci étant maintenant basée sur la qualité moyenne μ, soit lorsqu'on a respectivement $p < 1 \cdot \mu$ et $p < \frac{3}{2} \cdot \mu$. Les demandes de voitures d'occasion D_A et D_B émanant respectivement du groupe A et du groupe B sont donc données par :[107]

$$D_A = \begin{cases} \frac{Y_A}{p} & \text{si} \quad \mu > p \\ 0 & \text{si} \quad \mu \leq p \end{cases} \quad \text{et} \quad D_B = \begin{cases} \frac{Y_B}{p} & \text{si} \quad \frac{3}{2}\mu > p \\ 0 & \text{si} \quad \frac{3}{2}\mu \leq p \end{cases}$$

En agrégeant les demandes des deux groupes d'individus, on obtient la demande globale $D(p, \mu) = D_A + D_B$, fonction du prix p et de la qualité moyenne μ :

$$D(p, \mu) = \begin{cases} \frac{Y_A + Y_B}{p} & \text{si} \quad p < \mu \\ \frac{Y_B}{p} & \text{si} \quad \mu \leq p < \frac{3}{2}\mu \\ 0 & \text{si} \quad \frac{3}{2}\mu \leq p \end{cases}$$

L'offre

L'offre émane des individus du groupe A, groupe possédant les N voitures d'occasion. La qualité des biens est une caractéristique observable pour le vendeur. Il n'acceptera donc de vendre une voiture d'occasion que si le prix de marché excède la valeur subjective, c'est-à-

[106] La disposition à payer d'un individu est le prix maximal qu'il est prêt à accepter pour l'achat d'un bien. Elle dépend de l'évaluation subjective de l'utilité que procure le bien. Le fait que la disposition à payer de l'acheteur (3/2) soit supérieure à celle du vendeur (1) constitue une condition d'existence de l'échange.

[107] A la condition évidemment que $\frac{Y_A}{p} \leq N$ et $\frac{Y_B}{p} \leq N$.

dire si $p > 1 \cdot q$. Pour un prix de marché *p*, les voitures offertes sont ainsi celles qui respectent l'inégalité $q < p$. La proportion de voitures offertes est donc égale à $p \times \frac{1}{2} = \frac{p}{2}$, comme il ressort de la figure 6.2 :

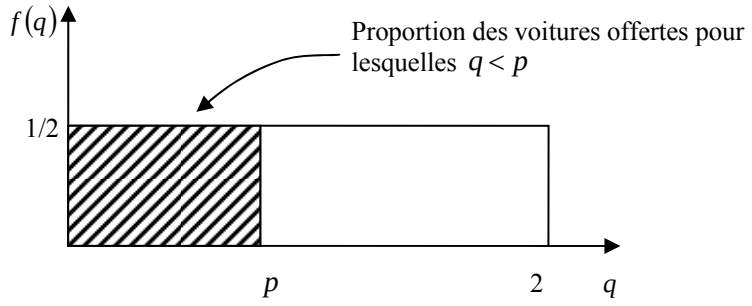


Figure 6.2

Le nombre total de voitures offertes *S* est donc :

$$S = S_A = N \times \frac{p}{2} \text{ avec } p \leq 2$$

La quantité totale offerte *S* par le groupe *A* est fonction du prix *p*. Elle est donc de la forme suivante :

$$S = S(p)$$

Relevons que $\frac{p}{2}$ est la qualité moyenne offerte pour un prix *p* donné.[108] Nous avons en effet :[109]

$$\mu = E(q / q < p) = \int_0^p q \cdot f(q / q < p) \cdot dq = \int_0^p q \cdot \frac{1}{p} dq = \frac{p}{2}$$

6.2. L'équilibre du marché en cas d'asymétrie de l'information

Le fonctionnement d'un marché où existe une asymétrie de l'information est donc caractérisé par les trois équations suivantes :

$$D = D(p, \mu)$$

$$S = S(p)$$

$$\mu = \mu(p)$$

[108] Il n'est pas nécessaire de donner des symboles différents à la qualité moyenne initiale de l'ensemble des voitures et à la qualité moyenne conditionnelle.

[109] $\frac{1}{p}$ est la distribution de probabilité conditionnelle de la qualité *q* offerte pour un prix *p*.

L'équilibre du marché résulte de la confrontation entre l'offre et la demande. Comme le montre la première équation, la demande est le produit de la comparaison par les acheteurs entre le prix *p* et la qualité moyenne μ . Pour l'offre (seconde équation), la comparaison porte sur le prix *p* et la qualité de la voiture proposée q . Enfin, la troisième équation montre que la qualité moyenne des voitures offertes sur le marché dépend du prix de marché.

Dans ces conditions, *il n'existe aucun prix d'équilibre* permettant la réalisation de l'échange. En effet, pour un prix quelconque *p*, la qualité moyenne μ est égale à $\frac{p}{2}$. Comme dans ce cas, on a $\frac{3}{2}\mu = \frac{3}{2}\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{3}{4}p < p$, alors la demande $D = D(p, \mu)$ est égale à 0, bien que à ce prix *p*, la quantité offerte est égale à $N\frac{p}{2}$. Cette conclusion ressort bien dans la figure 6.3 :

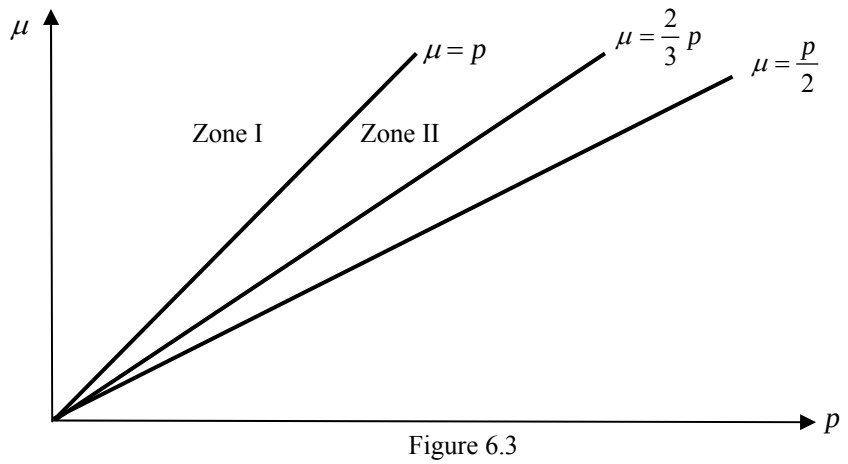


Figure 6.3

Dans la zone I de la figure 6.3, on a $p < \mu$ et qui est la condition pour avoir une demande égale à $D = \frac{Y_A + Y_B}{p}$. Mais le côté offre est tel que $\mu = \frac{p}{2}$. La condition pour que $D = \frac{Y_A + Y_B}{p}$ n'est donc pas réalisée. Le même résultat est obtenu dans la zone II de la figure 6.3 où on a $\mu \leq p < \frac{3}{2}\mu$ et qui est la condition pour avoir une demande égale à $D = \frac{Y_B}{p}$. Mais ici également, le côté offre est tel que $\mu = \frac{p}{2}$. La condition pour que $D = \frac{Y_B}{p}$ n'est donc pas réalisée.

Nous obtenons ainsi le résultat fondamental mis en avant par Akerlof : En cas d'asymétrie d'information, l'équilibre du marché peut être tel que les quantités échangées soient nulles. En d'autres termes, l'existence de l'asymétrie de l'information peut impliquer la disparition du marché. L'hypothèse de l'information parfaite dans les modèles économiques standards ne peut plus être considérée comme neutre.

Le processus conduisant à ce résultat est le produit du comportement des acheteurs et des vendeurs. La situation initiale est caractérisée par l'existence de voitures d'occasion de

différentes qualités de moyenne μ . Les acheteurs ne sont pas en mesure de faire la différence de qualité des voitures. Le prix qu'ils sont disposés à payer est donc identique pour toutes les qualités de voiture et se base, en général, sur la qualité moyenne. A un prix quelconque *p*, les vendeurs ayant une voiture de qualité $q \geq p$ se retirent du marché.[110] Seules demeurent sur le marché les voitures de qualité $q < p$. De ce fait, au prix *p*, la qualité moyenne des voitures offertes baisse de 1 à $\frac{p}{2} < 1$. Anticipant cette nouvelle qualité moyenne, les acheteurs n'acceptent pas de payer plus de $(3/2)(p/2)$, soit $(3/4)p$.[111] A leur tour, les vendeurs ayant une voiture de qualité supérieure ou égale à (3/4)*p* se retirent du marché. La qualité moyenne des voitures restant dans le marché baissera de nouveau à $((3/4)p)/2$, soit $(3/8)p$. La poursuite de ce processus a pour corollaire la baisse continuelle de la qualité. A l'équilibre, le prix tendra vers 0 et aucune voiture ne sera échangée. Cet exemple montre comment le risque de sélection adverse est une source d'inefficience économique et sociale.

Le caractère extrême de cette conclusion, soit l'exclusion totale du marché de *toutes* les voitures d'occasion, est en fait du à l'hypothèse de continuité de la qualité *q*. On peut obtenir les mêmes résultats, moins extrêmes et plus intéressants du point de vue intuitif, en considérant que la qualité est une variable discrète. Supposons par exemple que la qualité des voitures d'occasion peut prendre 5 modalités différentes : très mauvaise ($q = 1$), mauvaise ($q = 2$), moyenne ($q = 3$), bonne ($q = 4$) et très bonne ($q = 5$). Le vendeur connaît la qualité de la voiture qu'il propose à la vente. L'acheteur par contre, ne peut observer cette qualité mais dispose de croyances sur la qualité, croyances acquises par exemple à partir de l'observation des échanges passées. Supposons que pour l'acheteur, ces croyances sont telles que chaque modalité a la même probabilité d'occurrence, ce qui donne : probabilité (très mauvaise) = probabilité (mauvaise) = probabilité (moyenne) = probabilité (bonne) = probabilité (très bonne) = 1/5. Supposons également à titre de simplification, que le vendeur et l'acheteur ont le même prix subjectif et qu'il est de 1 pour la très mauvaise qualité, de 2 pour la mauvaise qualité, de 3 pour la qualité moyenne, de 4 pour la bonne qualité et de 5 pour la très bonne qualité.

Etant données ces croyances de l'acheteur, sa disposition à payer initiale est égale au prix moyen et est égale à $(1+2+3+4+5)/5 = 3$. Mais à ce prix, les vendeurs ayant des voitures de très bonne qualité et de bonne qualité se retirent du marché car ils exigent un prix (respectivement 5 et 4) plus élevé. De ce fait, ne restent sur le marché que les voitures de qualités très mauvaise, mauvaise et moyenne. La nouvelle qualité moyenne μ est de ce fait, égale à $(1+2+3)/3 = 2$ et la nouvelle disposition à payer est maintenant de 2, ce qui incite les propriétaires de voitures de qualité moyenne à se retirer du marché car ils exigent un prix (3) supérieur. De nouveau, la qualité moyenne baisse et devient 1,5 et les propriétaires de voitures de mauvaise qualité se retirent du marché. Ce processus s'arrête lorsque ne restent sur le marché que les voitures de très mauvaise qualité et le prix d'équilibre du marché est de 1. Ce résultat est un équilibre de sélection adverse, c'est-à-dire un équilibre du marché où ne s'échange que les biens de mauvaise qualité.

---

[110] Rappelons que pour une qualité *q*, la disposition à payer des individus du groupe *A* est $1 \cdot q$.

[111] On ne considère ici que les acheteurs du groupe *B* car ce sont ces individus qui ne possèdent pas de voitures d'occasion

6.3. Asymétrie de l'information et réduction de bien-être

En réduisant le volume des échanges, l'asymétrie de l'information a pour effet de réduire le bien-être des agents économiques. Pour montrer cela, comparons cette situation à celle où n'existe pas d'asymétrie de l'information.

Supposons que la qualité est observable par les deux parties de l'échange. On aura ainsi un équilibre de marché pour *chaque* niveau de qualité q_i. Il y aura donc autant de prix d'équilibre p_i que de qualités observées q_i.

En négligeant l'indice *i*, pour le niveau de qualité *q*, **l'offre** est le fait du groupe *A* et ne dépend que du prix *p*. Avec *N* représentant la quantité de voitures de qualité *q*, on a ainsi :

$$S(p) = \begin{cases} N & \text{si} \quad p \geq q \\ 0 & \text{si} \quad p < q \end{cases}$$

La **demande** émane des deux groupes *A* et *B* et ne dépend que du prix. Les acheteurs potentiels comparent le prix de marché et leur disposition à payer. Pour *chaque* qualité *q* observée, l'expression de la demande est :

$$D(p) = \begin{cases} \dfrac{Y_A + Y_B}{p} & \text{si} \quad p < q \\ \dfrac{Y_B}{p} & \text{si} \quad q \leq p \leq \dfrac{3}{2}q \\ 0 & \text{si} \quad p > \dfrac{3}{2}q \end{cases}$$

La fonction de demande se présente ainsi :

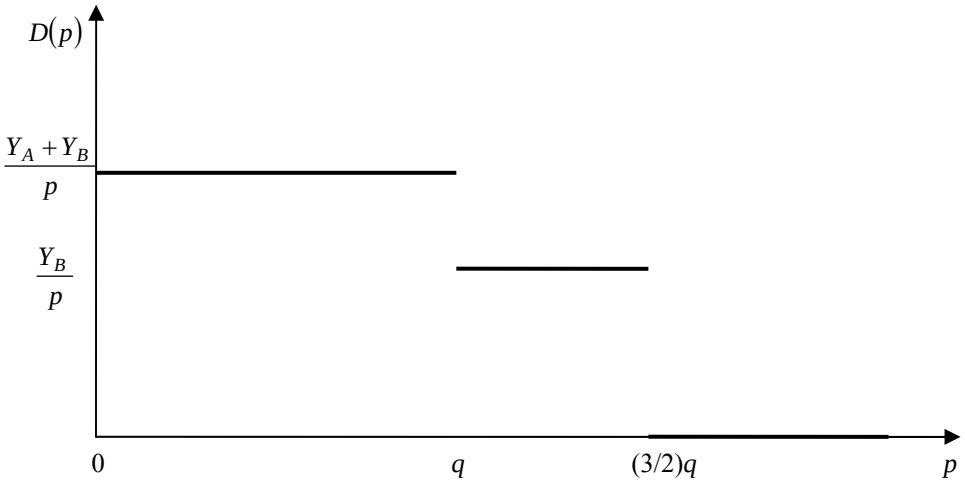


Figure 6.4

Pour la qualité *q*, l'intervalle de l'échange est $p \in \left[q, \frac{3}{2}q\right]$. En effet :

- Pour $p < q$, nous avons $D(p) = \frac{Y_A + Y_B}{p}$ et $S(p) = 0$. Pour cet intervalle de prix, aucun échange n'a lieu.
- Pour $p > \frac{3}{2}q$, nous avons $D(p) = 0$ et $S_i(p) > 0$. Ici également, aucun échange n'a lieu.

Au sein de l'intervalle $\left[q, \frac{3}{2}q\right]$, le prix dépendra du nombre de voitures offert. Trois cas sont à considérer :

- Premier cas : $Y_B < N \cdot 1$. Ici, le nombre de voitures *N* est supérieur à la capacité d'achat même évaluée avec la disposition à payer minimale. Le marché est donc un marché d'acheteurs. Le prix sera ainsi minimal, soit $p = q$.
- Deuxième cas : $Y_B > N \cdot \frac{3}{2}$. Ici, le nombre de voitures *N* est inférieur à la capacité d'achat même évaluée avec la disposition à payer maximale. Le marché est donc un marché de vendeurs. Le prix sera ainsi maximal, soit $p = \frac{3}{2}q$.
- Troisième cas : $\frac{2}{3}Y_B < N < Y_B$. L'équilibre du marché est tel que $D(p) = S(p)$, soit $\frac{Y_B}{p} = N$, ce qui donne le prix d'équilibre $p = \frac{Y_B}{N}q$ compris entre *q* et $\frac{3}{2}q$.

Pour chaque niveau de qualité *q*, le tableau suivant permet de comparer les deux situations.

Nombre de voitures *N*	$\frac{2}{3}Y_B$	Y_B	
Symétrie de l'information			
Quantité échangée	*N*	*N*	*N* partiellement
Prix	$(3/2)q$	$(Y_B/N)q$	q
Asymétrie de l'information			
Quantité échangée	0	0	0
Prix	Non déterminé	Non déterminé	Non déterminé

Ce tableau montre qu'en raison de l'existence de l'asymétrie de l'information, les quantités échangées sont plus faibles, inexistantes même. L'asymétrie de l'information induit donc une réduction du bien-être.

Cette conclusion, développée pour l'échange, est également vraie pour la production. Supposons qu'il existe deux types de producteurs, un producteur fabriquant un bien de bonne qualité –*G*– et un producteur fabriquant le même bien mais de mauvaise qualité –*B*. Supposons que nous ayons le cas, assez plausible, illustré dans la figure 6.5, avec C_G et C_B

représentant respectivement le coût de production du produit de bonne qualité et le coût de production du produit de mauvaise qualité et p_G et p_B représentant respectivement le prix de marché du produit de bonne qualité et le prix de marché du produit de mauvaise qualité.

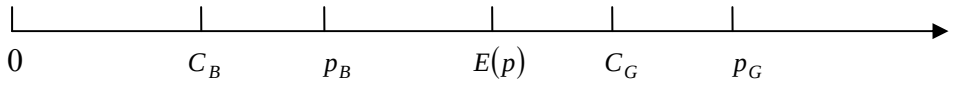


Figure 6.5

Si les consommateurs pouvaient distinguer sans ambiguïté le bien de type *G* du bien de type *B*, on aurait un prix pour chaque niveau de qualité, soit p_G et p_B avec $p_G > p_B$. Mais si les consommateurs ne peuvent pas distinguer clairement entre les deux types de biens (ou ils le peuvent mais avec un coût trop élevé), alors on aura un seul prix de marché pour les deux qualités. Ce prix est un prix moyen $E(p)$ et est évidemment inférieur à p_G. A ce prix $E(p)$, le producteur de bonne qualité supportera des pertes, ce qui provoquera sa disparition. Ne survivra donc que le producteur de bien de mauvaise qualité. Ce modèle montre que les mécanismes de marché peuvent ne pas suffire à l'émergence de biens de haute qualité.

Les effets négatifs de l'asymétrie de l'information sur le bien-être suggèrent que des mesures et des politiques économiques peuvent être mises en œuvre, en plus des réponses de marché comme le signal et le filtrage, en vue de réduire ces effets négatifs. Parmi ces mesures et politiques économiques, citons à titre d'exemple la protection des marques, la protection de la propriété intellectuelle et le contrôle indépendant de la qualité. L'existence de marques déposées ayant une réputation bien établie constitue pour les agents économiques une assurance de qualité. Pour cette raison, ils sont disposés à accepter un prix plus élevé.

Chapitre 7 : Asymétrie de l'information et équilibre du marché des assurances

Akerlof (1970) a montré qu'en présence de l'asymétrie de l'information, l'équilibre de marché est tel que l'échange ne porte plus que sur la mauvaise qualité.[112] Il s'agit du phénomène de *sélection adverse* qui a pour conséquence de réduire le bien-être des détenteurs (producteurs, vendeurs) de produits de bonne qualité car exclus du marché ainsi que des acheteurs (consommateurs). Un résultat extrême est obtenu lorsqu'on considère que la qualité est une variable continue, puisque dans ce cas, l'équilibre de marché est tel que le volume des échanges est nul. Cela signifie entre autres la « disparition » du marché, ce qui montre que l'hypothèse de l'information parfaite du modèle standard de l'économie concurrentielle n'est pas une hypothèse anodine.

Les deux principaux mécanismes de marché qui apparaissent comme étant des réponses au problème de la sélection adverse sont le *signal* et le *filtrage* (*screening*). Ce dernier mécanisme de marché est le fait de la partie non informée et consiste pour celle-ci à proposer un *menu de contrats* qui permet, après autosélection sur la base de prix non linéaires, de distinguer entre les différentes qualités de biens ou d'individus.

En nous basant essentiellement sur l'article de M. Rothschild & J. Stiglitz (1976)[113] qui considèrent le marché des assurances comme cadre d'analyse, nous montrons dans ce chapitre qu'avec la prise en compte explicite de l'asymétrie de l'information, le concept d'équilibre de marché change de signification. Deux types d'équilibres existent, qui peuvent être soit des équilibres mélangeants (pooling equilibria) soit des équilibres séparants (separating equilibria). De plus, il existe des cas où l'asymétrie de l'information implique que l'équilibre de marché peut ne pas exister.

7.1. Les données de base du modèle de Rothschild et Stiglitz

Pour la définition de la notion d'équilibre du marché d'assurance, les auteurs remarquent tout d'abord que les compagnies d'assurance proposent des contrats qui fixent à la fois le prix et la quantité.[114] Par contre, dans la plupart des autres marchés, les firmes fixent un prix et il revient à l'acheteur de choisir la quantité qu'il souhaite acquérir.[115]

Rothschild & Stiglitz définissent l'équilibre du marché des assurances comme étant un ensemble de contrats satisfaisant simultanément les deux conditions suivantes : 1) ces contrats maximisent l'espérance d'utilité des individus ; 2) ils sont tels que a) aucun des contrats de l'équilibre ne donne à la compagnie d'assurance une espérance de profit négative ; b) aucun

[112] Akerlof, G. (1970). « The market for lemons: Quality uncertainty and the market mechanism. » *Quarterly Journal of Economics*. Vol. 89, P 488-500.
[113] Rothschild, M. & Stiglitz, J. (1976). "Equilibrium in Competitive Insurance Markets: an Essay on the Economics of Imperfect Information". *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 90. P 629-649.
[114] Pour ce type de contrats, on parle de *prix non linéaires*, c'est-à-dire de prix unitaires dépendant de la quantité. Cette notion sera développée plus loin.
[115] Dans ce cas, on parle de *prix linéaires*, c'est-à-dire de prix unitaires ne dépendant pas de la quantité.

contrat hors équilibre, s'il venait à être offert, ne procure à la compagnie d'assurance, une espérance de profit non négative. Ce type d'équilibre est un équilibre à la Cournot-Nash.

Considérons la situation d'un individu ayant une richesse initiale égale à w et faisant face au risque de sinistre pouvant lui occasionner une perte égale à d. La probabilité d'occurrence de ce sinistre est p. La situation de cet individu peut être représentée par la figure 7.1 où les axes représentent son revenu dans les deux états de la nature possibles. Le point E représente le vecteur des revenus (consommations, richesse) contingents de l'individu sans assurance.

Supposons que cet individu ait la possibilité de s'assurer auprès d'une compagnie d'assurance et que le contrat d'assurance stipule que l'individu doit payer une prime d'assurance égale à α_1 et reçoit une indemnité égale à $\hat{\alpha}_2$ en cas de sinistre. En acceptant ce contrat d'assurance, le vecteur des revenus (consommations, richesse) contingents est maintenant représenté par le point F de la figure 7.1. Avec $\alpha_2 = \hat{\alpha}_2 - \alpha_1$, le vecteur $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ caractérise ainsi complètement le contrat d'assurance.

On montre que si un individu a de l'aversion pour le risque, alors les courbes d'indifférence représentatives de ses préférences sont décroissantes et convexes comme indiqué dans la figure 7.1. Dans celle-ci, l'individu accepte de s'assurer car le point F est situé sur une courbe d'indifférence "supérieure" à celle contenant le point E. De plus, si le contrat d'assurance est actuariellement équitable, alors la décision optimale de l'individu est l'assurance totale, ce qui situe son vecteur de revenus sur la ligne de certitude donnant un même revenu dans tous les états de la nature.[116]

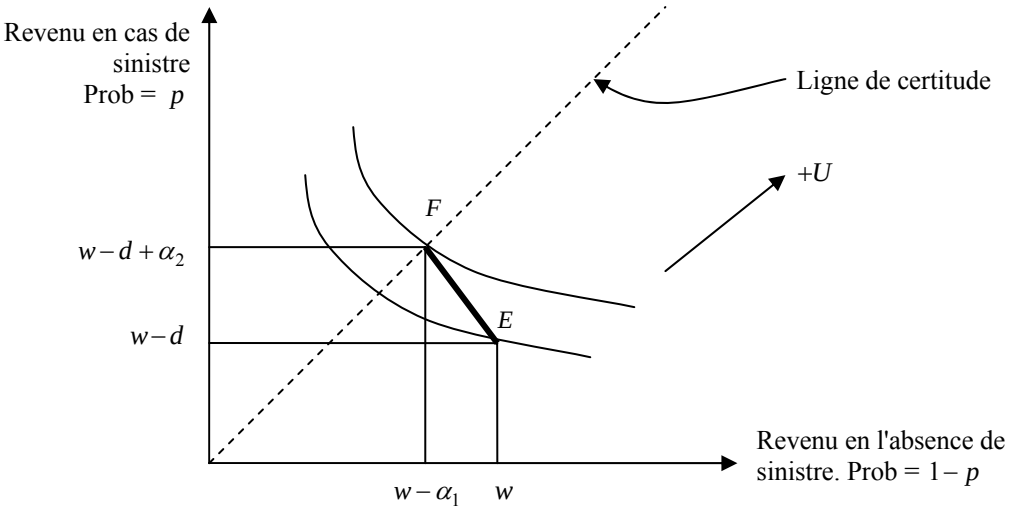


Figure 7.1

Un contrat d'assurance est actuariellement équitable si l'espérance de profit qu'il procure à la compagnie d'assurance est nulle, soit si $\alpha_1(1-p) - \alpha_2 p = 0$, ce qui donne $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{1-p}{p}$. Le rapport $-\alpha_2/\alpha_1$ représente la pente de la droite EF. Ainsi, les contrats d'assurance situés sur

[116] Voir Laffont, J. J. (1991), page 129.

la droite EF ont une pente égale, en valeur absolue, au rapport des probabilités et procurent à la compagnie d'assurance une espérance de profit égale à 0.

7.2. Asymétrie de l'information et phénomène de sélection adverse en assurance

Jusqu'à présent, nous avons fait l'hypothèse explicite qu'il n'existait qu'un seul type d'individus. En réalité, les individus peuvent avoir des caractéristiques différentes. Une caractéristique pertinente pour la compagnie d'assurance est la probabilité de sinistre de l'individu. Considérons maintenant qu'il existe deux types différents d'individus : 1) des individus ayant une probabilité de sinistre élevée, p_H et 2) des individus ayant une probabilité de sinistre faible, p_L avec $p_H > p_L$.

Cette probabilité de sinistre est une information privée de l'individu. Elle n'est donc pas observable par la compagnie d'assurance qui a tout de même des croyances au regard de cette probabilité. La compagnie d'assurance sait que la proportion d'individus à haut risque est λ. L'individu observe sa probabilité de sinistre et exprime sa demande d'assurance qui va en dépendre. En d'autres termes, la stratégie de l'individu (ici la demande d'assurance) dépend de son type (ici la probabilité de sinistre). Les stratégies des deux types d'individu sont donc $\hat{\alpha}_2^H = \alpha(p_H)$ et $\hat{\alpha}_2^L = \alpha(p_L)$.[117] Réécrivons le programme de l'individu donnant la prime d'assurance optimale $\hat{\alpha}_2$ selon qu'il soit du type p_H ou du type p_L. Comme la compagnie d'assurance ne peut faire la distinction entre les deux types, elle fixe une prime d'assurance par unité d'indemnité *commune* aux deux types. Soit π cette prime d'indemnité. On a donc $\pi = \dfrac{\alpha_1}{\hat{\alpha}_2}$, soit $\alpha_1 = \pi\hat{\alpha}_2$.

La demande d'assurance de l'individu de type p_H est la solution du programme suivant :

$$\max_{\hat{\alpha}_2^H} E(u(w)) = (1-p_H)u\left(w-\pi\hat{\alpha}_2^H\right) + p_H u\left(w-d-\pi\hat{\alpha}_2^H+\hat{\alpha}_2^H\right)$$

Concernant l'individu de type p_L, sa demande d'assurance est la solution du programme suivant :

$$\max_{\hat{\alpha}_2^L} E(u(w)) = (1-p_L)u\left(w-\pi\hat{\alpha}_2^L\right) + p_L u\left(w-d-\pi\hat{\alpha}_2^L+\hat{\alpha}_2^L\right)$$

Les conditions du premier ordre, nécessaires et suffisantes, sont telles que respectivement pour l'individu du type p_H et pour l'individu du type p_L, on a :

$$\frac{u'\left(w-d-\pi\hat{\alpha}_2^H+\hat{\alpha}_2^H\right)}{u'\left(w-\pi\hat{\alpha}_2^H\right)} = \frac{(1-p_H)\pi}{p_H(1-\pi)}$$

[117] Il s'agit donc d'un jeu bayésien tel qu'exposé au chapitre 4.

$$\frac{u'\left(w-d-\pi\hat{\alpha}_2^L+\hat{\alpha}_2^L\right)}{u'\left(w-\pi\hat{\alpha}_2^L\right)}=\frac{(1-p_L)\pi}{p_L(1-\pi)}$$

Comme $p_H > p_L$, on a $\frac{\pi(1-p_H)}{(1-\pi)p_H} < \frac{\pi(1-p_L)}{(1-\pi)p_L}$ et donc :[118]

$$\frac{u'\left(w-d-\pi\hat{\alpha}_2^H+\hat{\alpha}_2^H\right)}{u'\left(w-\pi\hat{\alpha}_2^H\right)}<\frac{u'\left(w-d-\pi\hat{\alpha}_2^L+\hat{\alpha}_2^L\right)}{u'\left(w-\pi\hat{\alpha}_2^L\right)}$$

Cette inégalité implique que $\hat{\alpha}_2^H > \hat{\alpha}_2^L$. Pour montrer cela, supposons le contraire, c'est-à-dire que $\hat{\alpha}_2^H < \hat{\alpha}_2^L$. (Le cas où $\hat{\alpha}_2^H = \hat{\alpha}_2^L$ est évidemment à rejeter). Dans ce cas, on aura le schéma de la figure 7.2 :

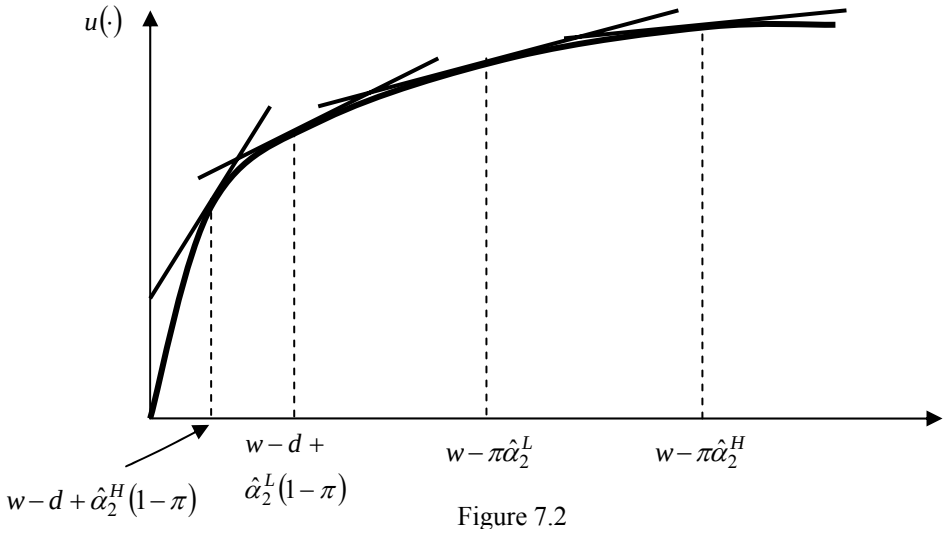


Figure 7.2

Etant donnée la concavité de $u(\cdot)$, on a :

$$\frac{u'\left(w-d+\hat{\alpha}_2^H(1-\pi)\right)}{u'\left(w-d+\hat{\alpha}_2^L(1-\pi)\right)}>\frac{u'\left(w-\pi\hat{\alpha}_2^L\right)}{u'\left(w-\pi\hat{\alpha}_2^H\right)}>\frac{u'\left(w-\pi\hat{\alpha}_2^H\right)}{u'\left(w-\pi\hat{\alpha}_2^L\right)}$$

Ce qui donne :

$$\frac{u'\left(w-d+\hat{\alpha}_2^H(1-\pi)\right)}{u'\left(w-\pi\hat{\alpha}_2^H\right)}>\frac{u'\left(w-d+\hat{\alpha}_2^L(1-\pi)\right)}{u'\left(w-\pi\hat{\alpha}_2^L\right)}$$

---

[118] Comme un contrat d'assurance actuariellement équitable est tel que $\frac{(1-p)\pi}{p(1-\pi)}=1$, cette inégalité implique que pour une même prime d'assurance par unité d'indemnité π, il n'est pas possible d'avoir simultanément des contrats d'assurance actuariellement équitable pour deux types d'individus p_H et p_L. Ce point est développé plus loin.

Ceci constitue une contradiction et on a donc bien $\hat{\alpha}_2^H > \hat{\alpha}_2^L$. Cette inégalité signifie que pour un *prix d'assurance* π *unique*, l'individu à haut risque a une demande d'assurance *supérieure* à la demande d'assurance de l'individu à bas risque.

Pour la dérivation de cette conclusion, nous avons considéré que le prix unitaire de l'assurance π est identique pour les deux types d'individu. Il s'agit en fait de *prix linéaires*, c'est-à-dire de prix unitaires indépendants de la quantité. La différence dans la demande d'assurance ressort dans la figure 7.3 où le point A représente le vecteur de consommations de l'individu du type L et le point A' le vecteur de consommations de l'individu du type H.[119]

Si le contrat A choisi par l'individu de type L procure à la compagnie d'assurance une espérance de profit égale à 0, alors le contrat A' choisi par l'individu de type H lui procure une espérance de profit négative. En effet, en situation de prix linéaires, le même prix unitaire d'assurance s'applique aux deux types d'individus, ce qui donne $\frac{\alpha_1^L}{\hat{\alpha}_2^L} = \frac{\alpha_1^H}{\hat{\alpha}_2^H} = \pi$. Si le contrat A du type p_L est actuariellement équitable, alors $\alpha_1^L(1-p_L) - \alpha_2^L p_L = 0$, soit $\alpha_1^L - \hat{\alpha}_2^L p_L = 0$, ce qui donne $\frac{\alpha_1^L}{\hat{\alpha}_2^L} = p_L = \pi$. L'espérance de profit du contrat A' du type p_H est $\alpha_1^H - \hat{\alpha}_2^H p_H = 1 - \frac{\hat{\alpha}_2^H}{\alpha_1^H} p_H = 1 - \frac{p_H}{\pi} = 1 - \frac{p_H}{p_L} < 0$. Donc, globalement sur les deux types d'individus réunis, la compagnie d'assurance subit des pertes.

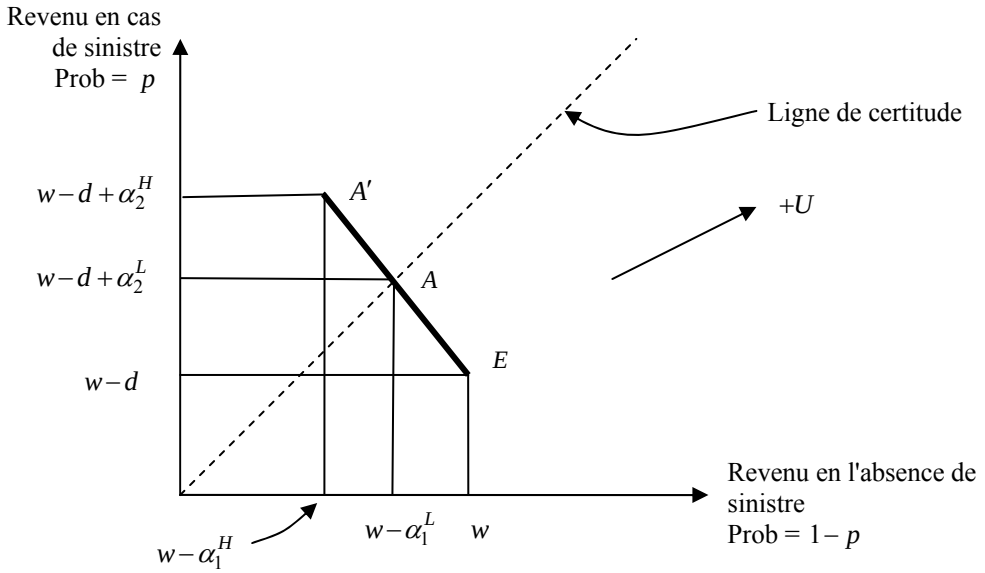


Figure 7.3

On peut également faire ressortir la différence de la demande d'assurance des deux types d'individu et donc la dépendance de la demande d'assurance par rapport au type, en analysant leur comportement au moyen des courbes d'indifférence. Une caractéristique fondamentale

[119] Cette figure représente le cas général où le contrat d'assurance n'est actuariellement équitable pour aucun type d'individu. On peut vérifier que le résultat ne change pas si le contrat d'assurance est actuariellement équitable pour l'un des types, par exemple le type p_H.

des courbes d'indifférence de deux types différents d'individu est connue sous l'expression de la propriété de l'unicité de l'intersection (single crossing property).

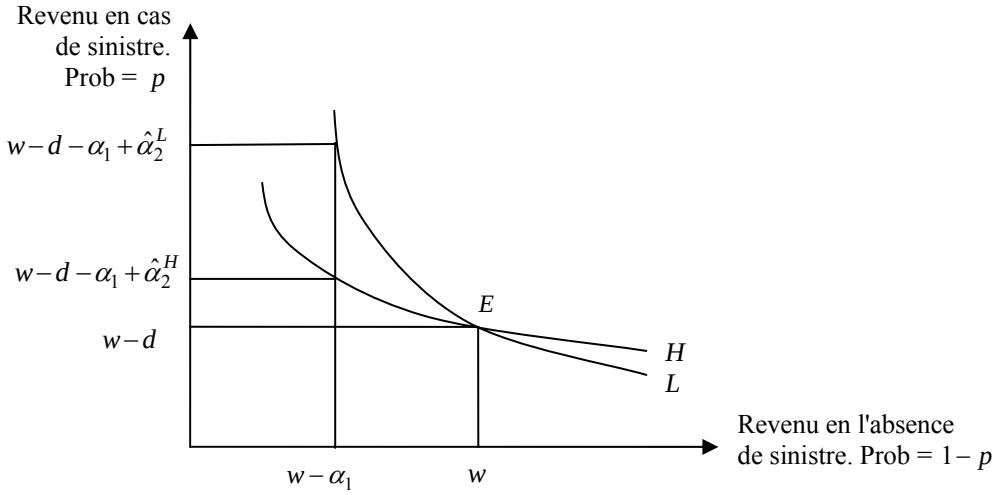


Figure 7.4

Cette propriété ressort dans la figure 7.4 qui montre qu'au point d'intersection *E*, la pente de la courbe d'indifférence de l'individu du type *L* est supérieure à la pente de la courbe d'indifférence de l'individu du type *H*. Au point *E*, le taux marginal de substitution (en valeur absolue) de l'individu *L* est supérieur à celui de l'individu *H*.

Pour expliquer cette différence de pente des courbes d'indifférence, considérons que le point E représente la situation où aucun des deux types n'est assuré. Leurs revenus contingents sont donc $(w_1, w_2) = (w, w-d)$. Pour chacun des deux types d'individu, la compagnie d'assurance propose un contrat d'assurance qui laisse inchangé le niveau de leur utilité avec une prime d'assurance égale à α_1. En contrepartie, en cas de sinistre, l'individu du type H reçoit une indemnité de $\hat{\alpha}_2^H$ et l'individu du type L reçoit une indemnité de $\hat{\alpha}_2^L$. Si le montant $\hat{\alpha}_2^L$ permet à l'individu du type L de maintenir constant son niveau d'utilité, alors le niveau d'utilité du type H est maintenu contant avec une indemnité $\hat{\alpha}_2^H$ telle que $\hat{\alpha}_2^H < \hat{\alpha}_2^L$ car la probabilité d'encaisser la somme $\hat{\alpha}_2^H$ est plus élevée que la probabilité d'encaisser $\hat{\alpha}_2^L$.

La figure 7.5 fait ressortir trois contrats actuariellement équitables, mais avec des prix (prime unitaire d'assurance) différents. Le premier contrat de pente $-(1-p_L)/p_L$ est un contrat actuariellement équitable pour les individus à bas risque. Le second contrat de pente $-(1-p_H)/p_H$ est un contrat actuariellement équitable pour les individus à haut risque. Enfin, le troisième contrat de pente $-(1-\overline{p})/\overline{p}$ est un contrat actuariellement équitable pour un risque moyen $\overline{p}$ où $\overline{p} = \lambda p_H + (1-\lambda)p_L$ avec λ représentant la proportion d'individus à haut risque. Comme $\overline{p}$ est une probabilité moyenne de sinistre, on a $p_H > \overline{p} > p_L$ et les pentes (négatives) des trois types de contrats sont donc telles que $\frac{1-p_H}{p_H} < \frac{1-\overline{p}}{\overline{p}} < \frac{1-p_L}{p_L}$.

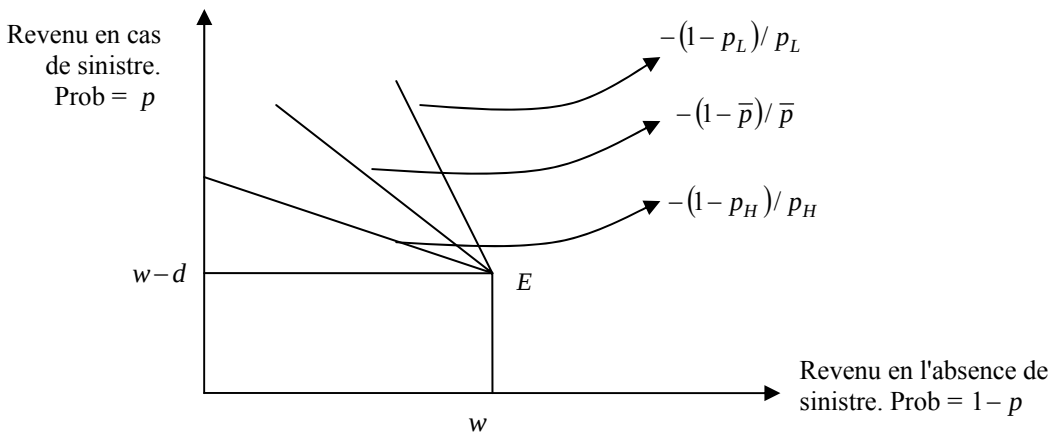


Figure 7.5

La figure 7.6 représente le cas où le prix de l'assurance est déterminé de telle façon à être actuariellement équitable pour les hauts risques. Comme le montre cette figure, à ce prix, les bas risques peuvent préférer ne pas s'assurer du tout.

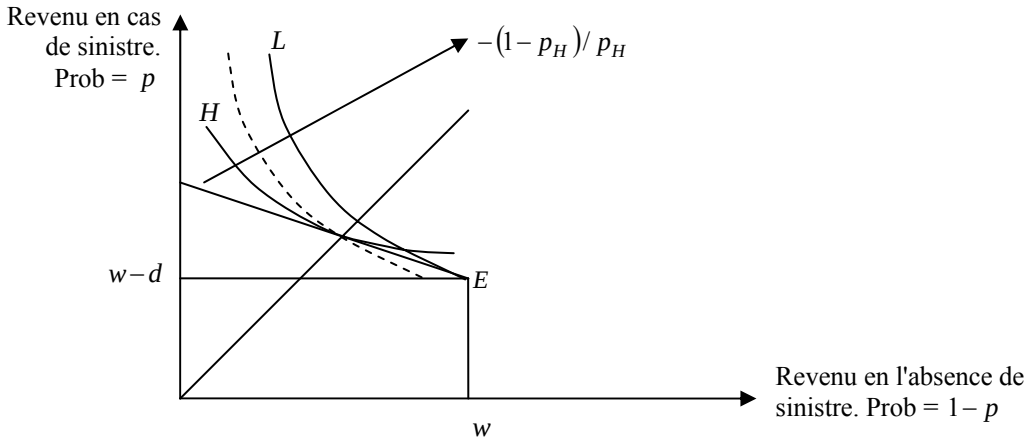


Figure 7.6

La figure 7.7 est un autre cas illustrant le fait que pour un prix d'assurance *unique* π, les hauts risques s'assurent plus et les bas risques s'assurent moins. Ici, la compagnie d'assurance propose un contrat d'assurance actuariellement équitable pour un risque moyen.

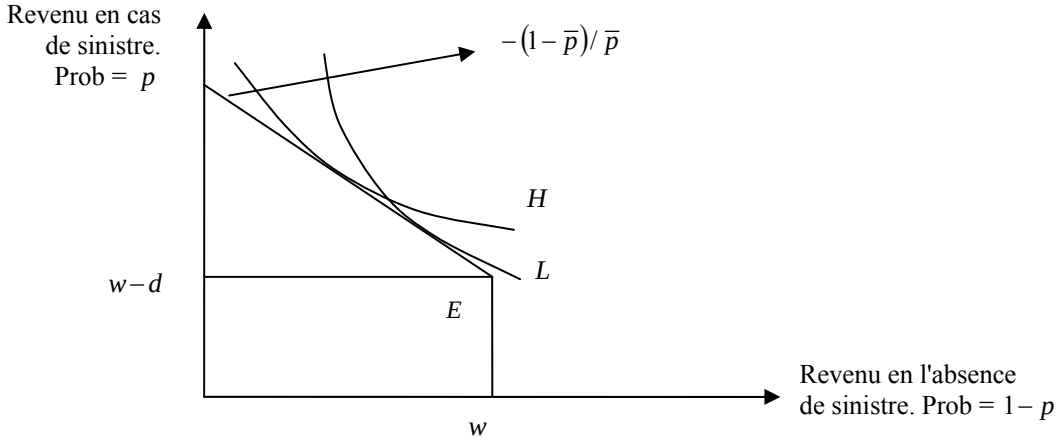


Figure 7.7

En résumé, pour un prix d'assurance unique π, les hauts risques s'assurent plus que les bas risques. Cette situation entraîne des pertes pour la compagnie d'assurance. Pour rétablir son équilibre, la compagnie d'assurance augmente son prix, ce qui incite encore plus les bas risques à réduire leur demande d'assurance. Il s'agit donc d'une situation de sélection adverse où les hauts risques *chassent* les bas risques. Cette situation est essentiellement une conséquence de l'asymétrie de l'information existant entre les compagnies d'assurance et les individus. Elle est également la conséquence de l'existence de prix linéaires, c'est-à-dire de prix indépendants de la quantité.

7.3. Equilibres séparants et équilibres mélangeants

Considérons maintenant que les compagnies d'assurance mettent en place un *mécanisme* leur permettant de segmenter la population en fonction du niveau de risque de l'individu. Des contrats d'assurance à *prix non linéaires* peuvent permettre aux compagnies d'assurance d'atteindre cet objectif. Dans ce cas, elles proposent des contrats prix / quantité, c'est-à-dire des contrats où l'individu n'a plus la possibilité de choisir le montant de l'indemnité (la quantité). Ce type de contrat est représenté par un *point* dans le plan ayant pour axes le revenu dans le cas de l'état de nature 1 et le revenu dans le cas de l'état de la nature 2.

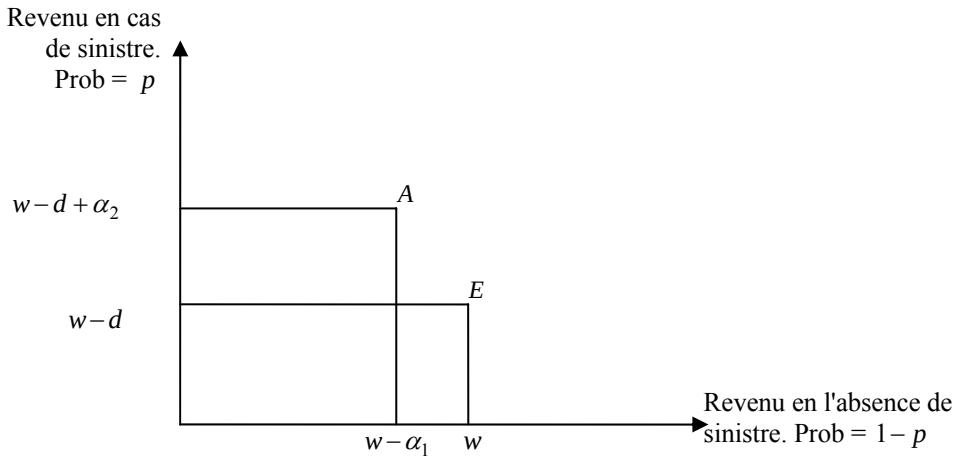


Figure 7.8

Le point A par exemple dans la figure 7.8 correspond à un contrat d'assurance où l'individu paie la somme α_1 et reçoit une indemnité de α_2 en cas de sinistre. Les autres points de la droite EA ne sont plus des contrats d'assurance proposés par la compagnie d'assurance.

Deux types de contrats non linéaires sont envisageables :[120]

- Des contrats mélangeants (α_1, α_2) destinés indistinctement à tous les types d'individus, qu'ils soient à bas risque ou à haut risque.
- Des contrats séparants (α_1^H, α_2^H) et (α_1^L, α_2^L), le premier étant destiné aux et choisi par les individus à haut risque et le second étant destiné aux et choisi par les individus à bas risque.

[120] Voir aussi J.J. Laffont (1991), page 137.

On montre d'abord que les contrats mélangeants ne sont pas *robustes* à la concurrence entre les compagnies d'assurance. Si λ représente la proportion des hauts risques, alors la probabilité moyenne de sinistre est $\overline{p} = \lambda p_H + (1-\lambda) p_L$. Soit ED la droite correspondant à la pente $-(1-\overline{p})/\overline{p}$ et soit un contrat d'assurance à prix non linéaire représenté par le point C sur cette droite. Ce contrat procure à la compagnie d'assurance une espérance de profit nulle. A ce point, les courbes d'indifférence des individus du type H et du type L se croisent comme indiqué dans la figure 7.9.

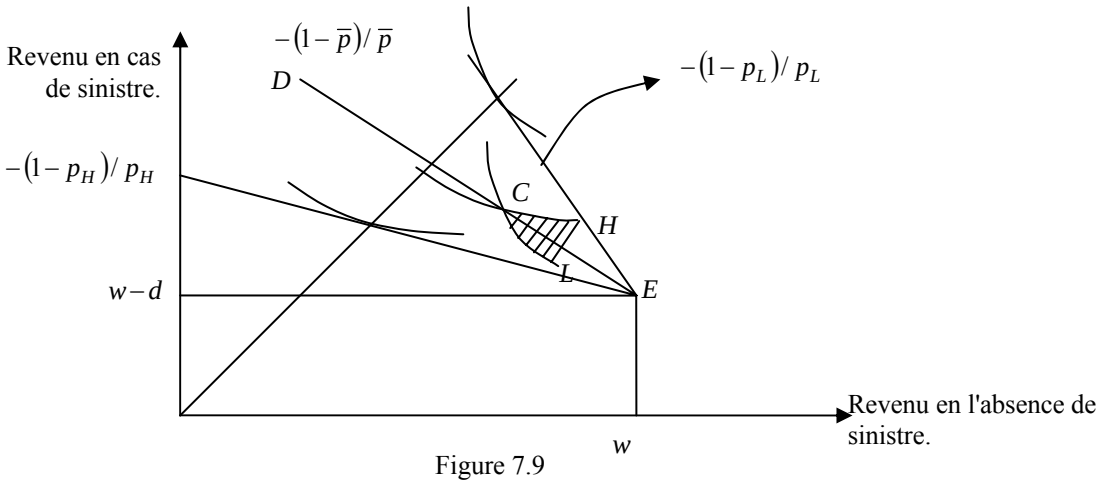


Figure 7.9

Cette figure montre que tout contrat d'assurance situé dans la zone hachurée est préféré par les individus à bas risque. Un tel contrat, s'il est de pente inférieure à $(1-p_L)/p_L$ et situé dans la zone hachurée, procure à la compagnie d'assurance une espérance de profit strictement positive. En situation de concurrence, un tel contrat sera donc proposé par une autre compagnie d'assurance et sera accepté par les individus à bas risque. En conséquence, la compagnie ayant proposé le contrat représenté par le point C n'attirera plus que les individus à haut risque, ce qui engendrera une espérance de profit strictement négative. Donc, le contrat mélangeant représenté par le point C ne peut être un contrat viable dans un marché d'assurance concurrentiel. En d'autres termes, un tel contrat n'est pas robuste à la concurrence.

Considérons maintenant le cas où la compagnie d'assurance propose aux individus des contrats séparants (α_1^H, α_2^H) et (α_1^L, α_2^L). Ces contrats doivent être tels que chaque type d'individu choisisse de façon optimale le contrat qui lui est destiné. En d'autres termes, l'individu de type H choisit le contrat (α_1^H, α_2^H) car c'est sa meilleure réponse aux propositions de la compagnie d'assurance. Il en est de même pour l'individu de type L pour qui le contrat (α_1^L, α_2^L) est le meilleur choix. On dit dans ce cas, que les choix effectués sont le résultat d'un processus d'*autosélection*.

Le *seul couple* de contrats séparants possibles où chaque type d'individu choisit par autosélection le contrat qui lui est destiné est représenté par les points B et A tel qu'il ressort dans la figure 7.10.

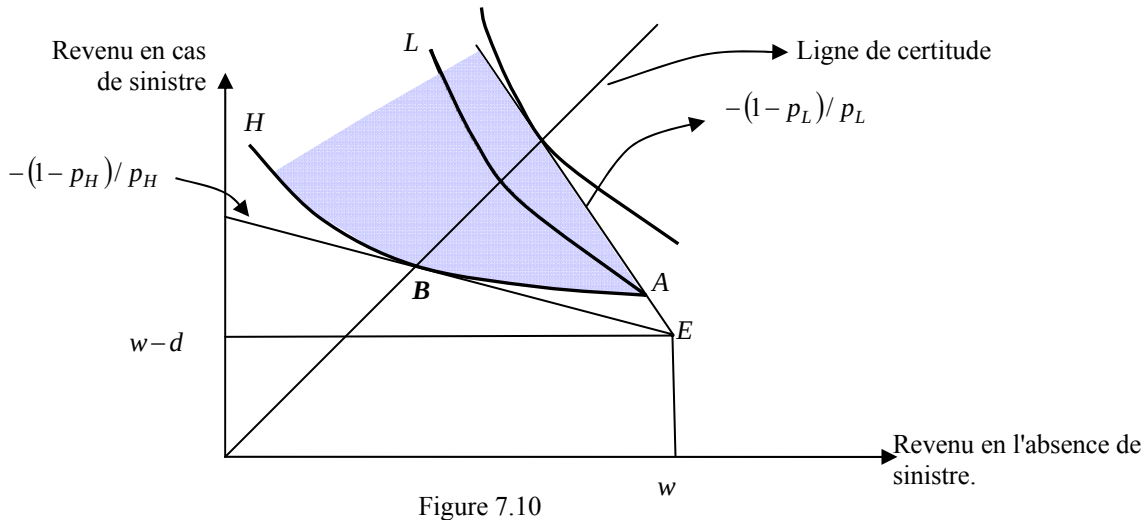


Figure 7.10

Le meilleur choix de l'individu du type *H* est le contrat *B* et le meilleur choix de l'individu du type *L* est le contrat *A*. Aucun type d'individu ne sera incité à dévier de ces choix.[121]

Pour qu'un couple de contrats soit un couple de contrats séparants, il est nécessaire que l'individu du type *H* ne soit pas incité à dévier. Comme tout contrat situé dans la zone grisée est préféré par l'individu du type *H* au contrat *B*, il est nécessaire que d'une part, les deux contrats soient situés tout deux sur *la même courbe d'indifférence* de l'individu du type *H*, d'autre part, que cette courbe d'indifférence soit tangente à la droite de pente $-(1-p_H)/p_H$.

Notons que la prime d'assurance par unité d'indemnité $\alpha_1/\hat{\alpha}_2$ est supérieure pour le contrat *B*. En d'autres termes, les contrats d'assurance séparants proposés par les compagnies d'assurance sont tels que le prix unitaire de l'assurance pour les individus à haut risque est supérieur au prix unitaire pour les individus à bas risque. De plus, le contrat *B* implique une couverture du risque plus forte que celle du contrat *A*.

Pour que le couple de contrats séparants soit robuste à la concurrence, il faut qu'il ne soit pas remis en cause par un contrat mélangeant. Deux cas de figure sont à envisager et cela en fonction de la valeur de λ, la proportion d'individus à haut risque. Le premier cas a trait à la situation où la proportion λ est faible. Ceci implique que la droite *ED* représentative des contrats mélangeants à espérance de profit nulle coupe la courbe d'indifférence de l'individu à faible risque passant par le point *A* comme le montre la figure 7.11.

[121] Relevons que strictement parlant, l'individu du type p_H est indifférent entre les deux contrats *B* et *A* car ils sont situés sur la même courbe d'indifférence. Nous avons donc implicitement considéré que l'individu du type p_H choisit de façon naturelle le contrat *B*. Autrement, pour *le forcer* à faire ce choix, il suffit que le contrat *A* soit à ε près décalé vers le point *E* sur la droite *EA*.

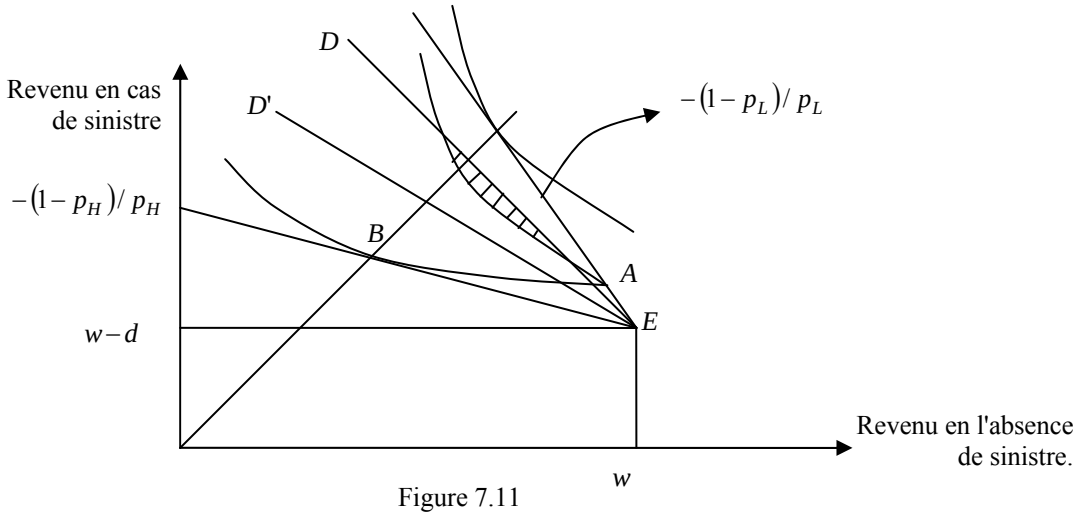


Figure 7.11

Dans ce cas, tous les contrats mélangeants situés dans la zone hachurée (figure 7.11) seront préférés par les deux types d'individus et procureront un profit espéré positif. Ce type de contrats mélangeants rend le couple de contrats séparants (B, A) non viable. Comme ce contrat mélangeant est lui également non robuste à la concurrence, il n'existe donc pas d'équilibre lorsque la proportion d'individus à haut risque λ est faible.

Le deuxième cas concerne la situation où la proportion d'individus à haut risque λ est élevée. Dans ce cas, la droite ED' représentative des contrats mélangeants à espérance de profit nulle passe au-dessous de la courbe d'indifférence des individus à bas risque passant par le point *A*. Dans ce cas, aucun contrat mélangeant ne peut attirer simultanément les individus à haut risque et les individus à bas risque. Le couple de contrats séparants (B, A) est donc dans ce cas bien un équilibre car il est robuste à la concurrence.

L'équilibre représenté par le couple (B, A) procure une assurance totale aux individus à haut risque mais une assurance partielle (sous optimale) aux individus à faible risque. C'est une situation de *sélection adverse* due à l'existence de l'asymétrie de l'information.

En clair, pour pouvoir discriminer entre les deux types de risque, la compagnie d'assurance propose un *menu de contrats* tel que :

- L'un prévoyant une couverture totale du risque avec une prime d'assurance élevée ;
- L'autre prévoyant une couverture plus faible du risque avec une prime d'assurance plus faible.

Par autosélection, l'individu à haut risque choisit le contrat ayant une couverture totale du risque et l'individu à risque faible choisit le contrat ayant une couverture partielle du risque. En proposant un tel menu de contrats, la compagnie d'assurance cherche à décourager l'individu à haut risque à choisir le même contrat que l'individu à faible risque, ce qui permet de séparer et d'identifier les deux types d'individus.

Chapitre 8 : Le modèle de signal de Spence

En présence du phénomène de sélection adverse, les agents économiques peuvent développer deux principales réactions possibles : le signal et le filtrage (screening). Le filtrage consiste pour la partie non informée qui joue donc en premier à proposer à la partie informée un menu de contrats de telle sorte que chaque type d'individu choisisse le contrat qui lui est destiné. Par ce processus d'autosélection, la partie informée révèle son type. Ce mécanisme de marché a été notamment exposé par Rothschild & Stiglitz (1976) pour le marché des assurances.[122]

Dans un mécanisme de signal, c'est la partie informée qui joue en premier. En considérant l'exemple des voitures d'occasion de Akerloff (1970), le signal est le fait des vendeurs possédant une voiture de bonne qualité, soit la partie informée de qualité élevée. Etant exclus par les vendeurs possédant une voiture de mauvaise qualité, ceux-ci sont incités à signaler à la partie non informée la qualité de leur produit. Le processus de signal est un mécanisme de marché qui est une réponse possible à l'asymétrie de l'information, c'est-à-dire un mécanisme de marché qui permet de transmettre de l'information de la partie informée vers la partie non informée.

Dans le cadre du marché du travail, le modèle de signal proposé par Spence (1973) montre que le niveau d'éducation peut être un signal (coûteux) qu'utilisent les travailleurs ayant une capacité productive élevée pour signaler leur qualité, ce qui leur permet d'obtenir un salaire plus élevé. Ainsi, dans le modèle de Spence, l'émetteur du signal est le travailleur, le récepteur les firmes et le signal est le niveau d'éducation.[123]

8.1. Les données de base du modèle de signal

L'asymétrie de l'information

Il y a problème d'asymétrie d'information lorsqu'une information pertinente de l'échange n'est pas observée par l'une des parties de l'échange. Dans le cas d'un contrat de travail, la productivité du travailleur est une information pertinente. Or, lors du recrutement d'un travailleur, l'employeur ne peut observer la capacité productive du candidat. A la place de cette dernière, l'employeur observe d'autres caractéristiques du travailleur comme par exemple le niveau d'éducation. Dans le modèle de signal, chaque travailleur est supposé connaître sa propre capacité productive.

A titre de simplification, on considère qu'un travailleur peut avoir l'un des deux niveaux possibles de capacité productive : une capacité productive faible θ_L ou une capacité productive élevée θ_H. On a donc $\Theta = \{\theta_L, \theta_H\}$ avec $\theta_L < \theta_H$. La probabilité *a priori* qu'un travailleur soit du type θ_H (resp. θ_L) est *p* (resp. 1-*p*). Ces probabilités peuvent également être interprétées comme les proportions de travailleurs de type θ_H et de type θ_L.

---

[122] Voir chapitre 7 ci-dessus.

[123] M. Spence (1973). "Job Market Signalling". *Quarterly Journal of Economics*. Vol. 87. P 296-332 et J. Riley (2001). " Silver Signals: Twenty-Five Years of Screening and Signaling". *Journal of Economic Literature*. Vol. XXXIX. Pages 423-478.

L'éducation en tant que signal

Pour signaler sa capacité productive, le travailleur peut choisir un niveau d'éducation *e* qui est une information observable par les firmes. Le coût d'obtention d'un niveau d'éducation *e* pour un travailleur de capacité θ est $C(e,\theta)$. A titre de simplification, le niveau d'éducation *e* est considéré comme étant le nombre d'années de scolarisation.

L'hypothèse fondamentale du modèle de Spence est que pour le travailleur à faible capacité, le signal est plus coûteux que pour le travailleur à capacité élevée. En d'autres termes, une condition nécessaire pour qu'une caractéristique joue le rôle de signal est que le coût du signal soit *négativement corrélé* à la capacité productive. La relation entre le coût de l'éduction et la capacité productive du travailleur est décrite par les caractéristiques suivantes : $C(0,\theta)=0$, $C_\theta(e,\theta)<0$, $C_e(e,\theta)>0$, $C_{ee}(e,\theta)>0$ et $C_{e\theta}(e,\theta)<0$.[124]

$C_e(e,\theta)$ est le coût marginal de l'éducation pour un travailleur de capacité θ. La dernière caractéristique signifie que le coût marginal d'émission du signal décroît avec la qualité. En d'autres termes, le coût marginal de l'éducation est plus élevé pour le travailleur à faible capacité par rapport au travailleur à capacité élevée. Cette condition, appelée *condition de Spence-Mirrlees*, offre la possibilité de trier les travailleurs selon leur niveau de productivité et ce, au vu de leur diplôme. Donc, dans le cas de deux niveaux de capacité productives θ_L et θ_H, on a:

$$C_e(e,\theta_L) > C_e(e,\theta_H) \text{ pour tout } e.$$

La courbe du coût de l'éducation suivant ces caractéristiques est donnée à la figure 8.1 :

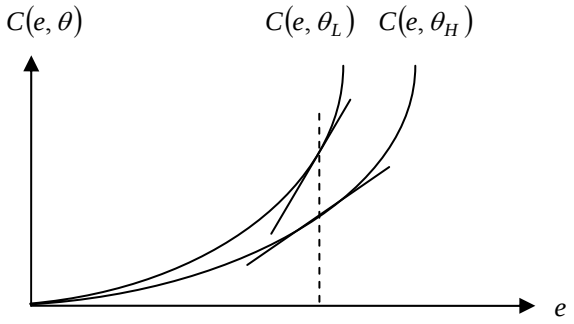


Figure 8.1

Ainsi, le coût total et le coût marginal sont tous deux plus élevés pour le travailleur à faible capacité que pour le travailleur à forte capacité.

Observant le niveau d'éducation *e* (et non la capacité productive θ) qu'elles interprètent et acceptent comme étant un signal, les firmes proposent un salaire $w(e)$ en fonction du niveau

[124] L'indice θ de $C_\theta(e,\theta)$ signifie la dérivée de $C_\theta(e,\theta)$ par rapport à θ. on a donc : $C_\theta(e,\theta)=\frac{\partial C(e,\theta)}{\partial\theta}$. Un indice double signifie qu'il s'agit d'une dérivée seconde.

d'éducation *e*. Sachant que le salaire est lié au niveau d'éducation, le travailleur choisira le niveau d'éducation avec pour objectif la maximisation de son paiement (utilité) qui est représenté par la différence entre le salaire offert et le coût du signal, soit $u(w, e/\theta) = w(e) - C(e, \theta)$.

Croyances et fonction de salaire

Pour faire une proposition de salaire, l'employeur ne peut se baser que sur l'information observable, à savoir le niveau d'éducation. Mais l'information pertinente pour la firme est la capacité productive du travailleur et non pas son niveau d'éducation. En conséquence, pour décider du recrutement et établir son offre de salaire, la firme se base sur le niveau d'éducation pour se faire une opinion sur la capacité productive du travailleur. En d'autres termes, le niveau d'éducation est utilisé pour transmettre (signaler) l'information non observable relative à la capacité productive. Sur la base de l'expérience passée, les firmes forment des croyances qui sont des probabilités sur la capacité productive conditionnelles au niveau d'éducation.

La productivité d'un travailleur de capacité θ et de niveau d'éducation *e* est $y(\theta, e)$. Le paiement obtenu par l'entreprise est donc égal à $y(\theta, e) - w(e)$ lorsque le travailleur est employé et zéro si le travailleur n'est pas employé. Dans le modèle de signal de Spence, les firmes ont pour objectif la maximisation de leur profit espéré et la compétition entre les firmes implique que les profits espérés des firmes sont nuls.[125] En conséquence, après avoir observé le niveau d'éducation, les firmes offrent un salaire égal à l'espérance de la productivité, ce qui donne :

$$w(e) = \mu(\theta_H / e) \cdot y(\theta_H, e) + [1 - \mu(\theta_H / e)] \cdot y(\theta_L, e)$$

Pour rendre le modèle plus frappant, Spence (1973) considère que l'éducation n'a aucun effet sur la capacité productive du travailleur, ce qui donne dans ce cas $y(\theta, e) = \theta$.[126]

Cette équation est également l'expression de la stratégie des entreprises (le récepteur). Elle spécifie une action (salaire offert) pour chaque message possible (niveau d'éducation). Pour que la stratégie des firmes soit complète, elle doit spécifier une action (salaire offert) pour *chaque* message possible. La probabilité $\mu(\theta_H / e)$ est la croyance *a posteriori* des firmes que le travailleur est du type θ_H (capacité élevée) étant donné le niveau d'éducation observé *e*. Cette probabilité est commune aux firmes. Ceci implique que les croyances des firmes sont également les mêmes pour des niveaux d'éducation *e* en dehors du sentier d'équilibre. La figure 8.2 représente une fonction de salaire $w(e)$ qui est une espérance basée sur les croyances *a posteriori* des firmes $\mu(\theta / e)$.

Cette figure montre que le salaire $w(e)$ est toujours compris entre θ_L et θ_H. Le point $(e', w(e'))$ par exemple, représente le cas où les firmes observent le niveau d'éducation e' et en déduisent les croyances $\mu(\theta_L / e = e') = \mu(\theta_H / e = e') = 1/2$ sur le type du travailleur, ce

[125] Voir Mas-Colell, Whinston & Green (1995), page 452.
[126] Voir par exemple R. Gibbons (1992), pour l'exposé du modèle de Spence dans le cas où l'éducation modifie la productivité du travailleur.

qui donne le salaire $w(e') = \frac{1}{2}\theta_L + \frac{1}{2}\theta_H$. D'une façon générale, tout salaire $w(e)$ strictement compris entre θ_L et θ_H est la conséquence de croyances *a posteriori* $\mu(\theta_H / e)$ ou, de façon équivalente $\mu(\theta_L / e)$.

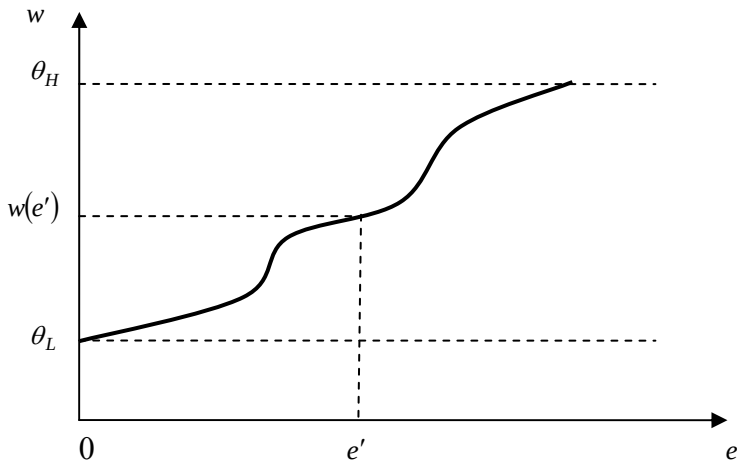


Figure 8.2

La propriété de l'unicité de l'intersection

La propriété de l'unicité de l'intersection (single crossing property) est une conséquence de l'hypothèse fondamentale de corrélation négative entre la capacité productive et le coût de l'éducation. Pour faire ressortir les implications de cette hypothèse fondamentale en termes de courbes d'indifférence, considérons un travailleur ayant un niveau d'éducation e_1 et qui perçoit un salaire égal à w_1. Déterminons l'augmentation de salaire nécessaire pour compenser le coût induit par à une augmentation de son niveau d'éducation de e_1 à e_2. Pour le travailleur de faible capacité, il est plus coûteux d'obtenir ce supplément d'éducation. Pour le compenser de ce surcroît de coût et ainsi maintenir constante son utilité, une plus grande augmentation du salaire (w_L au lieu de w_H) est nécessaire. Il en résulte les courbes d'indifférence suivantes dans l'espace (w, e) de la figure 8.3.

Une courbe d'indifférence représente les combinaisons de salaire *w* et de niveau d'éducation *e* donnant la même utilité. Au point d'intersection (e_1, w_1) et d'une façon générale en tout autre point d'intersection des courbes d'indifférence (de deux types différents de travailleur), la pente de la courbe d'indifférence du travailleur de type θ_L est supérieure à celle de l'individu de type θ_H. Cette caractéristique est connue sous l'appellation de « propriété de l'unicité de l'intersection ».

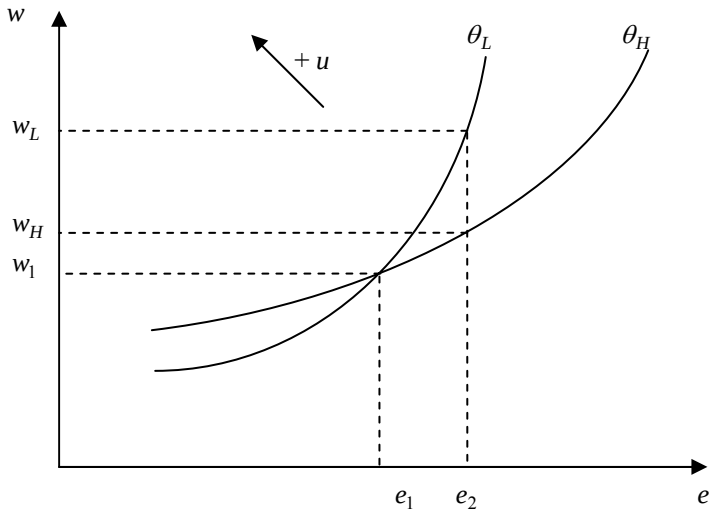


Figure 8.3

L'équilibre bayésien Parfait

Le modèle de signal de Spence appartient à la classe des jeux dynamiques à information incomplète et son timing est le suivant :

1. La Nature détermine, par tirage aléatoire, la capacité productive θ du travailleur qui peut être soit élevée θ_H avec la probabilité p soit faible θ_L avec la probabilité $(1-p)$. Le vecteur $(p, 1-p)$ est la distribution de probabilité *a priori* de la capacité productive. Elle est connaissance commune.
2. Le travailleur observe sa capacité θ et choisit son niveau d'éducation $e(\theta) \geq 0$.
3. Les firmes observent le niveau d'éducation e du travailleur (mais non sa capacité productive) qu'elles interprètent comme un signal du travailleur sur sa capacité productive et lui font simultanément une offre de salaire $w(e)$.
4. Le travailleur accepte la plus haute offre de salaire.

L'objectif du modèle est l'étude de l'existence d'équilibres de ce jeu et de leurs propriétés. Nous nous contenterons ici des équilibres en stratégies pures. Le concept d'équilibre utilisé est celui de l'équilibre bayésien parfait.[127] Un équilibre bayésien parfait est la donnée de l'ensemble des stratégies d'équilibre $(e^*(\theta), w^*(e))$ du travailleur et des firmes et des croyances $\mu(\theta / e)$ des firmes satisfaisant les propriétés suivantes :[128]

- La stratégie du travailleur $e^*(\theta)$ est optimale étant donnée la stratégie $w^*(e)$ choisie par les firmes ;
- Les croyances des firmes $\mu(\theta / e)$ sont consistantes avec la stratégie d'équilibre des travailleurs et sont obtenues par utilisation de la formule de Bayes lorsque cela est possible ;

[127] Voir chapitre 5 pour la définition de l'équilibre bayésien parfait pour un jeu de signal.
[128] Afin de ne pas alourdir l'exposé outre mesure, nous négligerons le qualificatif « au sens faible » en parlant du concept de l'équilibre bayésien parfait. L'équilibre bayésien parfait sera implicitement au sens faible s'il ne spécifie aucune restriction sur les croyances hors équilibre et ne sera pas au sens faible s'il spécifie des croyances raisonnables en dehors du sentier d'équilibre.

– Les firmes sont en situation de concurrence et font une offre simultanée tel que la fonction de salaire $w^*(e)$ soit un équilibre de Nash de ce jeu (entre les firmes). Le salaire offert est donc égal à la productivité espérée étant données les croyances consistantes $\mu(\theta / e)$.

Nous montrerons que ce jeu de signal admet un équilibre bayésien séparant dans lequel les firmes interprètent l'éducation comme un signal de capacité. Donc, le rôle du signal est de permettre aux firmes, à partir de l'observation du niveau d'éducation choisi par le travailleur, d'inférer la capacité productive des travailleurs qui est pour elles une information non observable. Ainsi, malgré son inutilité (supposée) dans l'amélioration du niveau de compétence des travailleurs, l'éducation est tout de même demandée par les travailleurs car elle leur permet de signaler leur capacité productive. Le jeu ainsi défini admet un équilibre dans lequel les travailleurs à haute productivité choisissent un niveau d'éducation supérieur à celui des travailleurs à faible capacité et les firmes interprètent cette différence comme étant un signal de la capacité des travailleurs et donc offrent un salaire élevé pour le travailleur ayant un niveau d'éducation élevé et un salaire faible pour le travailleur ayant un niveau d'éducation faible.

8.2. Le cas de symétrie de l'information

A titre de benchmark, considérons en premier lieu la situation d'information complète, c'est-à-dire la situation où la capacité productive du travailleur n'est pas son information privée, mais plutôt une information commune partagée par tous les acteurs du jeu. La compétition entre les firmes impliquant que les profits sont nuls, le travailleur de capacité θ et d'éducation e obtient un salaire égal à sa productivité. En d'autres termes, si les entreprises pouvaient observer la productivité des travailleurs, elles verseraient un salaire différencié en fonction de la capacité productive du travailleur, soit : $w(\theta_H) = \theta_H$ et $w(\theta_L) = \theta_L$.

En situation d'information complète, un travailleur de capacité θ choisit un niveau d'éducation e qui soit la solution du programme suivant :

$$\max_e \; u(w, e / \theta) = w(e) - C(e, \theta)$$

Comme le salaire est indépendant du niveau d'éducation et cette dernière est coûteuse, le niveau optimal d'éducation des deux types de travailleur est donc 0, soit $e^*(\theta_H) = e^*(\theta_L) = 0$. La figure 8.4 fait ressortir le choix des travailleurs de type θ_L et θ_H en cas de symétrie de l'information.

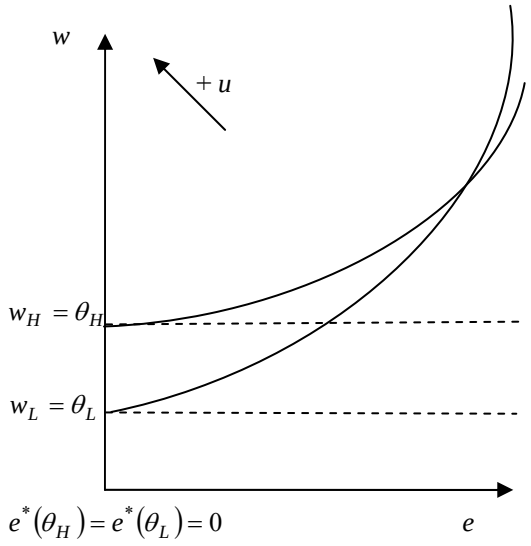


Figure 8.4

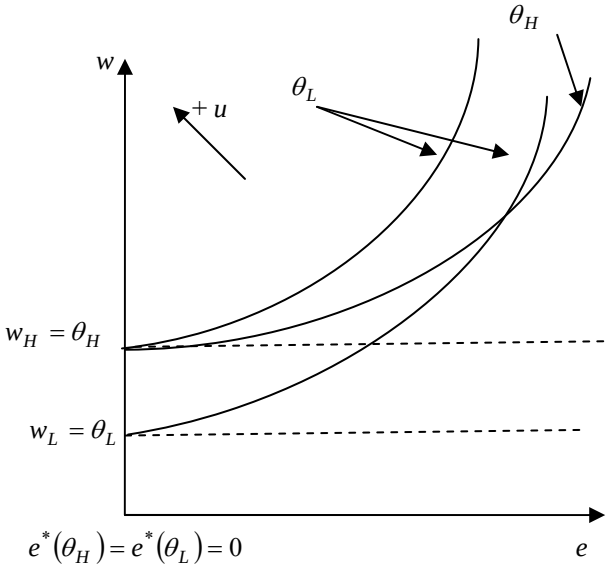


Figure 8.5

8.3. Le cas de l'asymétrie de l'information

Dans le cas d'asymétrie de l'information *sans signal*, les firmes ne peuvent pas distinguer entre les deux types de travailleurs. Par conséquence, l'asymétrie de l'information donne au travailleur de faible capacité (le type θ_L) la possibilité de se faire passer pour le travailleur de capacité élevé (le type θ_H). La figure 8.5 montre que par rapport au cas de symétrie de l'information, le type θ_L peut augmenter son utilité en imitant le type θ_H.

Les firmes ne pouvant distinguer les deux types de travailleurs, elles offriront donc un salaire égal à l'espérance de productivité, soit :

$$E(w) = p\,\theta_H + (1-p)\theta_L$$

On a évidemment $w_L < E(w) < w_H$. Le travailleur du type θ_H est donc défavorisé par la situation d'asymétrie d'information sans possibilité de signal puisqu'il reçoit un salaire moyen inférieur au salaire correspondant à sa capacité productive. Il est de ce fait incité à émettre un signal (même coûteux) à partir duquel les firmes infèrent la qualité du travailleur. La conséquence de cette obligation est que le type θ_H sera contraint de s'éloigner de son niveau optimal correspondant au cas de symétrie de l'information.

L'objectif du modèle de Spence est d'étudier la possibilité d'existence d'équilibres pour ce jeu de signal. Il peut exister deux types d'équilibre : Equilibre séparant et équilibre mélangeant. Par équilibre, on entend ici un état à partir duquel aucune partie n'est incitée à dévier de façon unilatérale, ce qui correspond à l'équilibre de Nash.

8.4. Les équilibres bayésiens parfaits

Pour l'étude des équilibres bayésiens parfaits, symbolisons par $e^*(\theta)$, le niveau d'éducation d'équilibre du travailleur après avoir observé son type et par $w^*(e)$, le salaire d'équilibre offert par les firmes après avoir observé le niveau d'éducation du travailleur.

Le niveau d'éducation $\underline{e}$

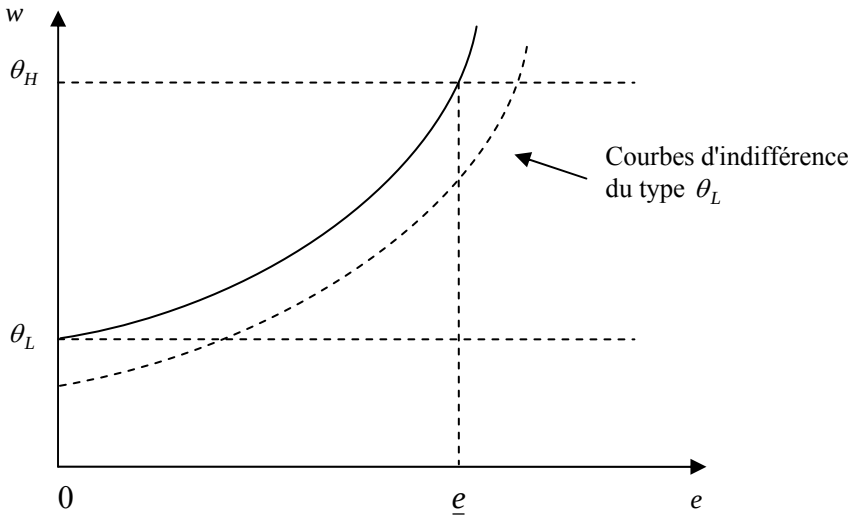


Figure 8.6

Soit $\underline{e}$ un niveau d'éducation tel que $u(\theta_H, \underline{e} / \theta_L) = u(\theta_L, 0 / \theta_L)$, c'est-à-dire $\theta_H - C(\underline{e}, \theta_L) = \theta_L - C(0, \theta_L)$. En d'autres termes, le niveau d'éducation $\underline{e}$ est tel que l'individu de type θ_L est indifférent entre d'une part, choisir un niveau d'éducation égal à zéro et recevoir un salaire de θ_L et d'autre part choisir le niveau d'éducation $\underline{e}$ et recevoir un salaire de θ_H. La courbe d'indifférence du type θ_L correspondant à ces deux alternatives est représentée par la figure 8.6. Le caractère cruciale de cette courbe d'indifférence est le suivant : Pour des niveaux d'éducation $e \in]0, \underline{e}[$, le travailleur de type θ_L préfère strictement l'alternative (e, θ_H) à l'alternative $(0, \theta_L)$.[129] Par contre, pour des niveaux d'éducation $e \geq \underline{e}$, le travailleur de type θ_L préfère strictement l'alternative $(0, \theta_L)$ à toute autre alternative (e, θ_H). En d'autres termes, même avec un salaire élevé θ_H, l'individu de type θ_L n'est pas disposé à acquérir un niveau d'éducation supérieur ou égal à $\underline{e}$.

Cette donnée cruciale est une information commune à tous les joueurs. En conséquence, le travailleur de type θ_H et les entreprises savent que l'individu de type θ_L n'est aucunement incité à choisir un niveau d'éducation supérieur ou égal à $\underline{e}$. Donc le travailleur de type θ_H peut utiliser cette information pour se distinguer du travailleur de type θ_L, ceci en choisissant un niveau d'éducation supérieur ou égal à $\underline{e}$.

[129] Il est évident que pour $e \in]0, \underline{e}[$, tout travailleur préfère strictement l'alternative (e, θ_H) à l'alternative $(0, \theta_L)$.

Equilibres séparant (separating equilibria)

On a un équilibre séparant lorsque chaque type de travailleur choisit un niveau d'éducation qui lui soit propre, ce qui donne lieu à un niveau de salaire pour chaque niveau de productivité. Donc dans un équilibre séparant, le travailleur de haute capacité choisit le niveau d'éducation $e^*(\theta_H)$ supérieur au niveau d'éducation $e^*(\theta_L)$ choisi par le travailleur de faible capacité. En utilisant la formule de Bayes, les firmes déduisent des croyances qui soient *consistantes* avec cette stratégie. Donc, si les firmes supposent que le travailleur choisit une stratégie séparante et si elles observent le niveau d'éducation $e^*(\theta_H)$, alors leurs croyances (probabilité) que le travailleur est du type θ_H est égale à 1, soit $\mu(\theta_H / e = e^*(\theta_H)) = 1$. De même, si elles observent le niveau d'éducation $e^*(\theta_L)$, alors leurs croyances (probabilité) que le travailleur est du type θ_L est égale à 1, soit : $\mu(\theta_L / e = e^*(\theta_L)) = 1$.

Après observation du niveau d'éducation choisi par le travailleur, les firmes maximisent leur espérance de profit et en raison de la concurrence, offrent un salaire égal à l'espérance de productivité, ce qui donne :

$$w(e) = \mu(\theta_H / e) \cdot \theta_H + [1 - \mu(\theta_H / e)] \cdot \theta_L$$

Etant données leurs croyances consistantes, les firmes offrent un salaire de θ_H au travailleur à haute capacité et un salaire θ_L au travailleur de faible capacité. On a donc : $w^*(e^*(\theta_H)) = \theta_H$ et $w^*(e^*(\theta_L)) = \theta_L$. Etant donnée cette meilleure réponse des firmes, la décision optimale du travailleur de faible capacité est de choisir un niveau d'éducation égal à 0, soit : $e^*(\theta_L) = 0$. En effet, le salaire d'équilibre offert par les firmes étant fixé à θ_L, le travailleur maximise son utilité en minimisant son coût d'éducation, ce qui peut être obtenu par le choix d'un niveau d'éducation nul. Le choix optimal du travailleur de type θ_L est représenté par la figure 8.7 qui fait ressortir sa courbe d'indifférence passant par son point d'équilibre $(e^*(\theta_L), w(e^*(\theta_L))) = (0, \theta_L)$. Dans un équilibre séparant, le travailleur de type θ_L choisit donc le même niveau d'éducation que dans le cas d'information complète.

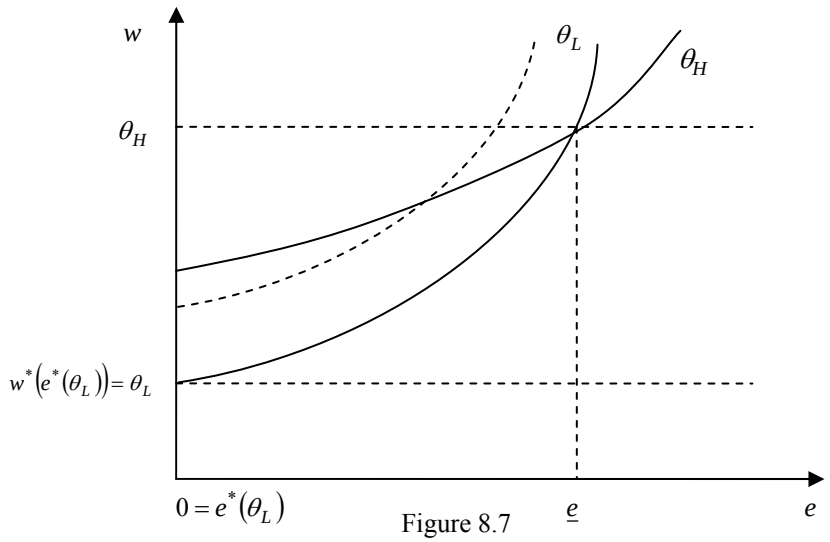


Figure 8.7

La figure 8.7 montre que si le travailleur de type θ_H choisit un niveau d'éducation inférieur à $\underline{e}$, alors le travailleur de type θ_L sera incité (meilleure réponse) à dévier et à l'imiter. En effet, la courbe d'indifférence de l'individu de type θ_L passant par le point (e, θ_H) avec $0 < e < \underline{e}$ représente un niveau d'utilité supérieur par rapport à la courbe d'indifférence passant par le point $(0, \theta_L)$.

Afin d'annihiler l'incitation du travailleur de type θ_L à dévier du point $(0, \theta_L)$, le travailleur de type θ_H choisira par conséquence un niveau d'éducation $e^*(\theta_H)$ tel que le travailleur de type θ_L ne puisse pas l'imiter. Le niveau d'éducation $e^*(\theta_H)$ doit donc être tel que $u(\theta_L, 0/\theta_L) \geq u(\theta_H, e^*(\theta_H)/\theta_L)$, soit $\theta_L - C(0, \theta_L) \geq \theta_H - C(e^*(\theta_H), \theta_L)$ et finalement $\theta_L \geq \theta_H - C(e^*(\theta_H), \theta_L)$. En d'autres termes, $e^*(\theta_H)$ doit être au moins égal au niveau d'éducation $\underline{e}$ comme le montre la figure 8.7.

On peut ainsi construire un équilibre bayésien parfait séparant ayant les caractéristiques suivantes :

- Stratégies des travailleurs : $e^*(\theta_L) = 0$ et $e^*(\theta_H) = \underline{e}$;
- Une fonction de salaire $w^*(e)$ telle que par exemple celle décrite par la figure 8.8 avec notamment $w^*(e^*(\theta_L)) = w^*(0) = \theta_L$ et $w^*(e^*(\theta_H)) = w^*(\underline{e}) = \theta_H$;
- Croyances *a posteriori* des firmes : $\mu(\theta_L / e = 0) = 1$ et $\mu(\theta_H / e = \underline{e}) = 1$.

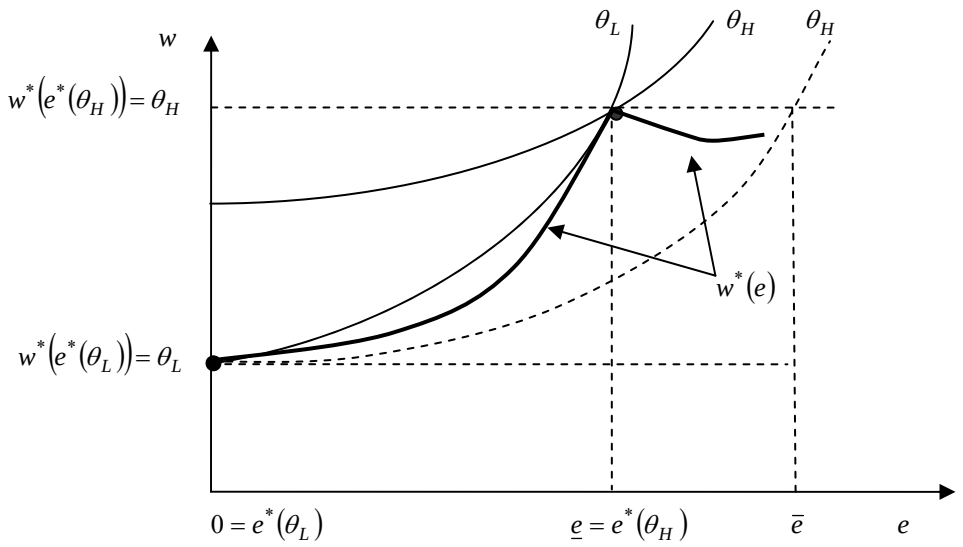


Figure 8.8

Cet équilibre est un *équilibre séparateur au moindre coût* (*least cost separating equilibrium*). Pour montrer qu'il s'agit bien d'un équilibre (de Nash) bayésien parfait, remarquons en premier lieu qu'étant données les croyances $\mu(\theta_H / e = \underline{e}) = 1$ et $\mu(\theta_L / e = 0) = 1$, les entreprises versent à chaque travailleur un salaire égal à sa productivité, ce qui représente une situation optimale pour les entreprises. La figure 8.8 montre également, qu'étant donnée la

fonction de salaire $w^*(e)$, chaque type de travailleur aura choisi la courbe d'indifférence la plus élevée possible.[130]

Notons qu'en fait, le type θ_L est indifférent entre les points $(0, \theta_L)$ et $(\underline{e}, \theta_H)$. Nous considérons implicitement (sans perte de généralité) que dans un équilibre bayésien parfait, le type θ_L opte pour le premier équilibre $(0, \theta_L)$. Autrement, on peut obtenir un équilibre bayésien parfait en posant que le travailleur de type θ_H choisit un niveau d'éducation à un ε près, *légèrement supérieur à* $\underline{e}$, ce qui force le type θ_L à choisir le point $(0, \theta_L)$.

Une remarque importante est à faire à propos des croyances des firmes, remarque à relier à la multiplicité des équilibres bayésiens parfaits. Dans la construction de l'équilibre bayésien parfait de la figure 8.8, aucune restriction n'a été posée à propos de ces croyances lorsque le message du travailleur n'est ni zéro ni $\underline{e}$, c'est-à-dire lorsque le signal de l'émetteur se situe *en dehors du sentier d'équilibre*. Les seules restrictions imposées aux croyances concernent les croyances du sentier d'équilibre et sont $\mu(\theta_L / e = 0) = 1$ et $\mu(\theta_H / e = \underline{e}) = 1$. Ces restrictions, basées sur la règle de Bayes, sont satisfaites par la fonction de salaire $w^*(e)$ de la figure 8.8 car $w^*(0) = \theta_L$ et $w^*(\underline{e}) = \theta_H$.

La conséquence de l'absence de restrictions imposées aux croyances en dehors du sentier d'équilibre est que l'équilibre bayésien parfait ainsi défini est compatible avec plusieurs autres fonctions de salaire. Par exemple, dans l'équilibre décrit à la figure 8.9, on obtient les mêmes stratégies d'équilibre ($e^*(\theta_L) = 0$; $e^*(\theta_H) = \underline{e}$; $w^*(0) = \theta_L$ et $w^*(\underline{e}) = \theta_H$) avec les croyances suivantes : $\mu(\theta_H / \underline{e} \le e < \bar{e}) = 1$ et $\mu(\theta_H / e < \underline{e}) = 0$.

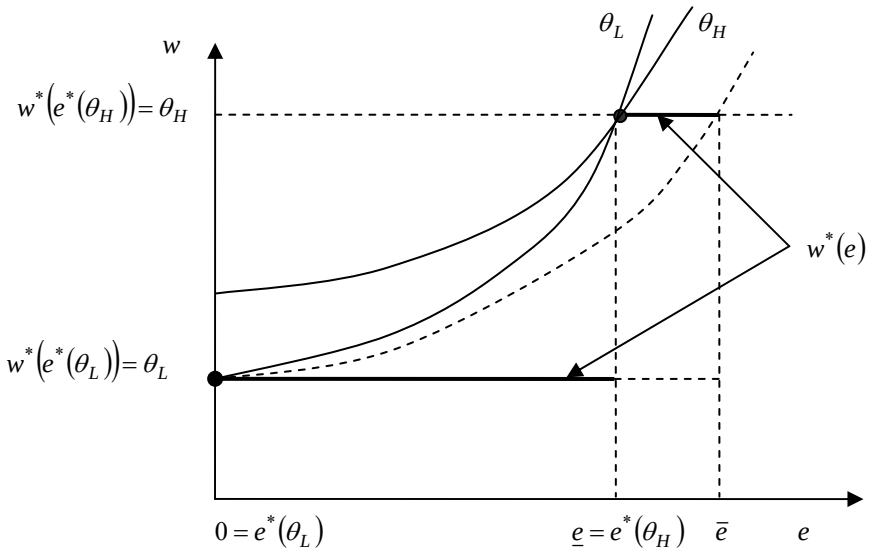


Figure 8.9

[130] Notons que $\bar{e}$ est le niveau maximal d'éducation que pourrait choisir le travailleur de type θ_H car ce dernier préfère en effet un salaire θ_L avec un niveau d'éducation $e = 0$ à un salaire θ_H avec un niveau d'éducation $e > \bar{e}$.

Ces croyances signifient que les entreprises sont certaines que le travailleur est du type θ_H si son niveau d'éducation *e* est supérieur ou égal à $\underline{e}$. Par contre, si le niveau d'éducation *e* est inférieur à $\underline{e}$, alors les firmes considèrent avec certitude que ce dernier est du type θ_L. Etant données ces croyances, le salaire optimal offert par les firmes est $w^*(e) = \theta_L$ si $e < \underline{e}$ et $w^*(e) = \theta_H$ si $e \geq \underline{e}$. Le graphe de cette fonction de salaire est donné à la figure 8.9. Etant donnée cette fonction de salaire (la meilleure réponse des firmes), les courbes d'indifférence montrent que les meilleurs choix des travailleurs de type θ_L et θ_H sont respectivement $e^*(\theta_L) = 0$ et $e^*(\theta_H) = \underline{e}$.

La multiplicité des équilibres bayésiens parfaits peut jeter un doute sérieux sur le bien-fondé de ce modèle. Cependant, l'introduction de raffinements des croyances hors équilibre permet d'écarter tous les équilibres non raisonnables.

L'interprétation de l'existence d'un équilibre séparant est que les travailleurs de haute capacité doivent supporter un coût d'éducation leur permettant de se distinguer des travailleurs de faible capacité et obtenir ainsi un salaire plus élevé. Le signal (ici l'éducation) n'est pas nécessairement un objectif en tant que tel. Dans un équilibre séparant, le comportement rationnel des joueurs implique que chaque travailleur choisisse un niveau d'éducation qui est *révélateur* de son type. Malgré l'absence supposée d'impact de l'éducation sur la performance, la demande d'éducation trouve sa justification dans sa qualité de signal de capacité productive. Cette aptitude de signal de l'éducation est rendue possible par le fait qu'au delà d'un certain niveau d'éducation $\underline{e}$, le coût d'éducation qui en résulte ne peut être supporté par les travailleurs de faible capacité. Par contre, un travailleur de haute capacité peut supporter ce coût (mais ne dépassant pas $\overline{e}$). Le choix d'un niveau d'éducation différent est clairement dû à une différence de capacité productive. Ce potentiel de signal de l'éducation est le résultat de la caractéristique fondamentale $C_{e\theta}(e, \theta) < 0$ qui a donné lieu à la propriété de l'unicité de l'intersection.

Equilibres mélangeants (pooling equilibria)

Lorsqu'il existe, dans un équilibre mélangeant les deux types de travailleurs envoient le même signal, c'est-à-dire choisissent le même niveau d'éducation, que nous symboliserons par e_p. On a donc : $e^*(\theta_L) = e^*(\theta_H) = e_p$. L'équilibre bayésien parfait impose que les croyances des firmes soient obtenues par application de la règle de Bayes et soient consistantes avec la stratégie des travailleurs. En conséquence, étant donnée la stratégie $e^*(\theta_L) = e^*(\theta_H) = e_p$ des travailleurs, les croyances *a posteriori* des entreprises sont identiques aux croyances *a priori*. Les firmes ne révisent donc pas leurs croyances. On a donc $\mu(\theta_H / e = e_p) = p$ et $\mu(\theta_L / e = e_p) = 1 - p$. La meilleure réponse des firmes est dans ce cas d'offrir un salaire égal à l'espérance de productivité, soit :

$$w^*(e_p) = \mu(\theta_H / e = e_p) \cdot \theta_H + \mu(\theta_L / e = e_p) \cdot \theta_L = p \cdot \theta_H + (1 - p) \cdot \theta_L = E(\theta)$$

La figure 8.10 montre que le niveau d'éducation e_p ne peut être supérieur à $\tilde{e}$ car cela correspondrait pour le type θ_L à une courbe d'indifférence (passant par un point $(e, E(\theta))$

avec $e > \tilde{e}$) d'un niveau d'utilité inférieur, ce qui constitue pour le type θ_L une incitation à dévier vers $e = 0$ avec un salaire égal à θ_L. En d'autres termes, pour qu'un équilibre mélangeant existe, il faut que $u(E(\theta), e_p / \theta_L) \geq u(\theta_L, 0 / \theta_L)$, ce qui entraîne $0 \leq e_p \leq \tilde{e}$.

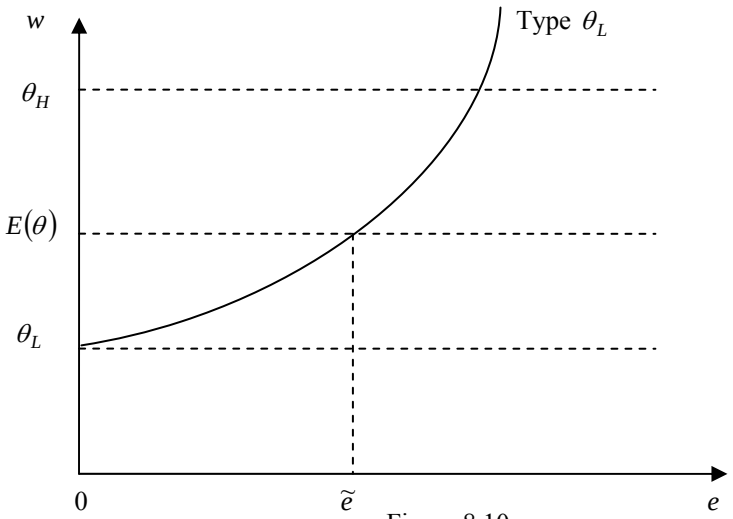


Figure 8.10

La figure 8.11 décrit un équilibre bayésien parfait dans lequel le niveau d'éducation e_p choisi par les deux types est compris entre 0 et $\tilde{e}$ ainsi que la fonction de salaire qui soutient cet équilibre.

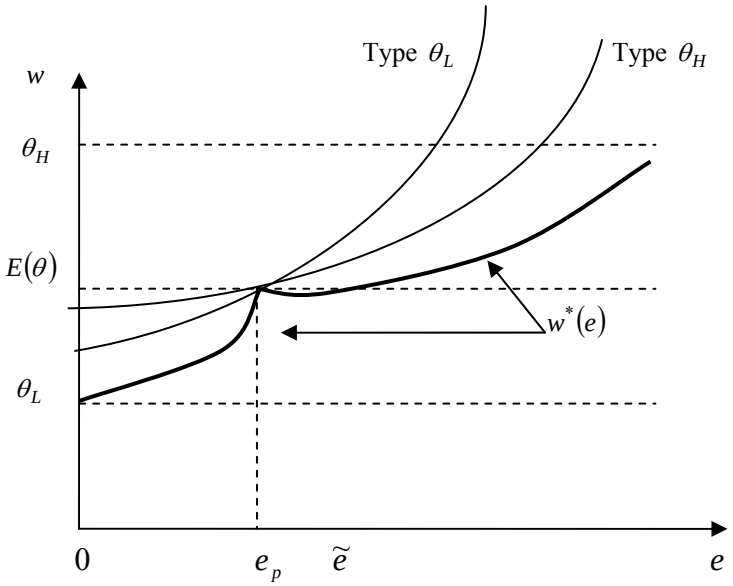


Figure 8.11

Pour montrer qu'il s'agit bien d'un équilibre, notons en premier qu'étant donnée la fonction de salaire $w^*(e)$ de la figure 8.11, les deux types de travailleur maximisent leur utilité au point $(e_p, E(\theta))$. En effet, tout autre salaire de la fonction de salaire $w^*(e)$ coupe (ou est un point de tangence avec) une courbe d'indifférence à un niveau d'utilité inférieur. Les firmes sont également en situation optimale car le salaire versé $E(\theta)$ est égal à l'espérance de productivité. Enfin, la fonction de salaire $w^*(e)$ est consistante avec les croyances

« révisées » (bayésiennes) sur le sentier d'équilibre, car à l'observation de e_p, les croyances des firmes sont $\mu(\theta_H / e = e_p) = p$ et $\mu(\theta_L / e = e_p) = 1 - p$, ce qui donne un salaire d'équilibre de $E(\theta)$. Notons qu'il existe une grande liberté dans le tracé de la fonction $w^*(e)$, ceci en raison de l'absence de restriction sur les croyances hors équilibre.

Ainsi, dans un équilibre mélangeant, le niveau d'éducation ne transmet aucune information et ne joue donc pas de fonction de signal. De ce fait, tout niveau d'éducation positif dans un équilibre mélangeant peut être considéré comme un surinvestissement dans l'éducation. Comme l'utilité du travailleur diminue avec le niveau d'éducation *e*, l'équilibre Pareto dominant est l'équilibre dans lequel $e_p = 0$.[131]

Au même titre que pour l'équilibre séparant, il existe une multitude d'équilibres mélangeants. Comme le montre la figure 8.11, il existe un continuum d'équilibres mélangeants, autant que de niveaux d'éducation e_p compris entre 0 et $\tilde{e}$. Comme mentionné plus haut, l'existence de plusieurs équilibres n'est pas un résultat désirable. En fait, l'introduction de croyances hors équilibre raisonnables permet d'écarter tous les équilibres mélangeants.

8.5. Raffinements des croyances hors équilibre et sélection des équilibres

Un modèle de signal peut admettre plusieurs équilibres qui peuvent être séparants ou mélangeants. Ceci est en particulier la conséquence de l'absence de restrictions relatives aux croyances des firmes *hors sentier d'équilibre*. Or, pour une définition complète de la stratégie des firmes, on doit également spécifier les croyances des firmes si le message (choix du niveau d'éducation) du travailleur n'est pas le message d'équilibre. Des restrictions sont proposées afin d'écarter les équilibres ayant des croyances hors équilibre *non raisonnables*. Ces raffinements ont pour effet de réduire le nombre d'équilibres. En conséquence, un équilibre bayésien parfait ne sera considéré comme étant une prédiction crédible que si les croyances hors sentier d'équilibre à cet équilibre sont raisonnables.[132]

Commençons par montrer comment les équilibres mélangeants ne survivent pas au test du raffinement basé sur le critère de *domination par l'équilibre* et le *critère intuitif*. Considérons pour cela un équilibre mélangeant quelconque tel que décrit à la figure 8.12 (quasiment identique à l'équilibre de la figure 8.11) ayant comme stratégies d'équilibre $e^*(\theta_H) = e^*(\theta_L) = e_p$ et $w^*(e_p) = E(\theta)$. A cet équilibre, on a $w^*(e) = \theta_H$ pour tout $e \geq \underline{e}$ car la croyance raisonnable à ces niveaux d'éducation est $\mu(\theta_H / e \geq \underline{e}) = 1$.

[131] Voir par exemple Salanié, B. (1994). *Théorie des contrats*. Economica, 1994. Paris. Page 54.
[132] Voir chapitre 5 pour l'exposé de certains critères de raffinements des équilibres des jeux de signaux.

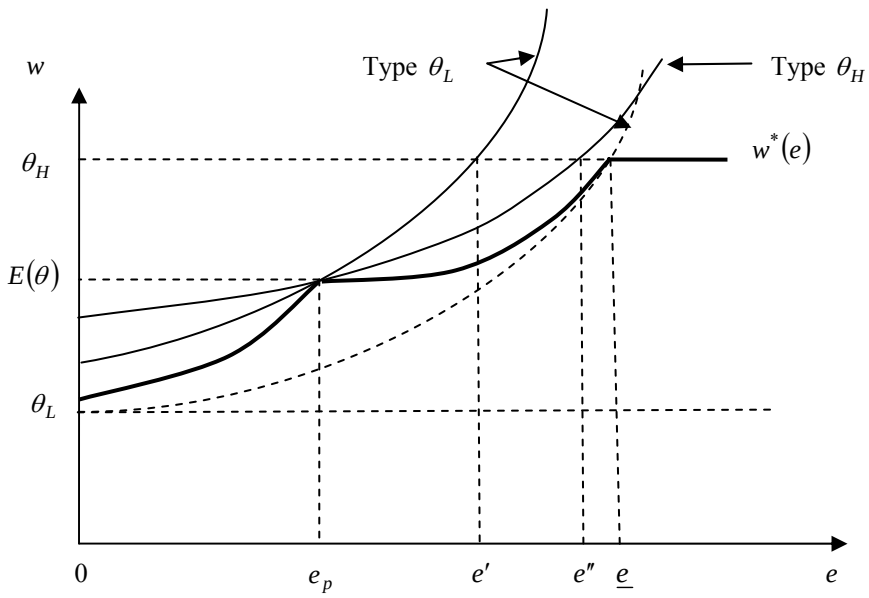


Figure 8.12

La fonction de salaire $w^*(e)$ qui supporte cet équilibre doit être telle que $w^*(e) < \theta_H$ pour $e' \leq e \leq e''$. Autrement, le type θ_H serait incité à dévier vers un point (θ_H, e) avec $e' \leq e \leq e''$. Mais pour que $w^*(e)$ soit strictement inférieure à θ_H, il faut que les croyances des firmes soient telles que $\mu(\theta_H / e) < 1$ pour $e' \leq e \leq e''$. Or, ces croyances ne sont pas raisonnables car *l'utilité obtenue par le type θ_L à cet équilibre mélangeant est strictement supérieure à l'utilité qu'il obtiendrait pour une issue $(w^*(e), e)$ avec $e' \leq e \leq e''$* et ce quelque soit la valeur de $w^*(e)$, c'est-à-dire même si le salaire est maximal, soit égal à θ_H. On a ainsi pour $e \in [e', e'']$:

$$u^*(E(\theta), e_p / \theta_L) > \underset{w \in W^*(\Theta, e)}{\text{Max}} u(w, e / \theta_L)$$

$W^*(\Theta, e)$ est l'ensemble des salaires d'équilibre (meilleures réponses) des firmes qui font suite à l'observation par ces firmes du niveau d'éducation *e* du travailleur. En d'autres termes, pour le type θ_L, le choix d'un niveau d'éducation $e \in [e', e'']$ est strictement dominé par le niveau d'éducation $E(\theta)$ de l'équilibre mélangeant. Par contre, le type θ_H pourrait accroître son utilité s'il venait à choisir un niveau d'éducation $e \in [e', e'']$. En conséquence, si les firmes venaient à observer un niveau d'éducation $e \in [e', e'']$, elles devraient être raisonnablement convaincues qu'il ne s'agit pas d'un travailleur du type θ_L. Donc, étant donné l'équilibre mélangeant $(e_p, E(\theta))$, à l'observation d'un niveau d'éducation hors équilibre $e \in [e', e'']$, ne sera considérée comme étant raisonnable que la croyance $\mu(\theta_H / e) = 1$. Donc, pour $e' \leq e \leq e''$, on obtient le salaire $w^*(e) = \theta_H$, ce qui crée une incitation pour le travailleur de type θ_H à dévier vers le niveau d'éducation e' et obtenir ainsi un salaire de θ_H. L'équilibre mélangeant de la figure 8.12 ne satisfait donc pas le critère intuitif.

Ceci implique également la déviation du type θ_L vers le niveau d'éducation égal à 0. En effet, étant donnée la déviation du type θ_H, pour tout choix d'éducation $e \notin [e', e'']$, les croyances raisonnables des firmes sont $\mu(\theta_L / e \notin [e', e'']) = 1$. Les firmes proposeront donc un salaire θ_L,

ce qui incite le type θ_L à choisir un niveau d'éducation égal à 0. L'existence de cette possible déviation implique qu'*aucun équilibre mélangeant ne pourra survivre* si l'on imposait aux croyances hors sentier d'équilibre d'être raisonnables sur la base du critère intuitif.

Concernant les équilibres séparants, le raffinement selon le critère de la *domination par l'équilibre* implique que la croyance raisonnable à l'observation d'un niveau d'éducation hors équilibre supérieur à $\underline{e}$ est $\mu(\theta_L / e > \underline{e}) = 0$ ou, de façon équivalente $\mu(\theta_H / e > \underline{e}) = 1$. En effet, pour tout niveau d'éducation supérieur à $\underline{e}$, le type θ_L obtient une utilité inférieure à celle obtenue à l'équilibre et ce quelque soit la croyance des firmes. Il en résulte que pour le message hors équilibre $e \geq \underline{e}$, le salaire d'équilibre est $w^*(e) = \theta_H$, comme cela ressort à la figure 8.9.

Ceci implique à son tour qu'un équilibre séparant où le type θ_H choisirait un niveau d'éducation supérieur à $\underline{e}$ ne satisfait pas le critère de domination par l'équilibre car comme le montre la figure 8.13 un tel équilibre n'est possible qu'avec un salaire inférieur à θ_H pour des niveaux d'éducation compris entre $\underline{e}$ et $\hat{e}$, ce qui correspond aux croyances hors équilibre non raisonnables $\mu(\theta_H / e \in [\underline{e}, \hat{e}]) < 1$.

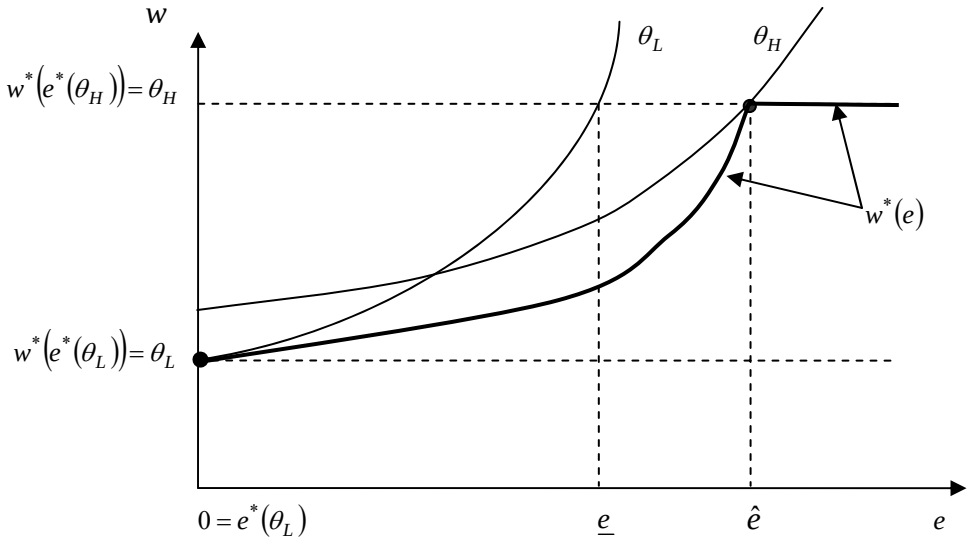


Figure 8.13

Le seul équilibre qui satisfait aux tests des raffinements des croyances hors sentier équilibre est celui où le type de faible productivité choisit un niveau d'éducation égal à 0 correspondant à son choix du cas de l'information complète et où le type de haute productivité choisit un niveau d'éducation supérieur mais juste suffisant pour décourager le type de faible productivité à l'imiter.

8.6. L'impact du signal sur le bien-être

En cas de symétrie de l'information, chaque type de travailleur reçoit le salaire qui correspond à sa capacité productive. On a donc $w^*(\theta_L) = \theta_L$ et $w^*(\theta_H) = \theta_H$. L'éducation n'ayant aucun

impact (supposé) sur la capacité productive, chaque type de travailleur choisit un niveau d'éducation égal à zéro, soit $e^*(\theta_L) = e^*(\theta_H) = 0$. En présence d'asymétrie d'information, dans un équilibre séparant, la situation du travailleur de type θ_L est identique. Par contre, pour obtenir un salaire de θ_H, le travailleur de type θ_H, se trouve être dans l'obligation de choisir le niveau d'éducation $\underline{e} \geq 0$ afin de décourager le type θ_L à l'imiter. En d'autres termes, l'existence de travailleurs de type θ_L exerce une *externalité négative* sur les travailleurs de type θ_H.[133]

Par rapport à la situation d'asymétrie d'information sans signal, l'existence de la possibilité de signal a des effets différents sur les parties concernées. Pour les firmes, dans les deux cas, elles paient un salaire égal à $E(\theta)$. Pour le travailleur de faible capacité, sans signal, le salaire perçu est égal à $E(\theta)$. Mais lorsqu'il existe la possibilité de signal, le type θ_L obtient un salaire de θ_L. Etant donné que dans les deux cas, le niveau d'éducation est nul, l'existence de la possibilité de signal implique une *réduction* du bien-être des travailleurs de type θ_L.

Par contre, pour le travailleur de type θ_H, l'effet de l'existence du signal dépend entre autres du niveau de $E(\theta)$, c'est-à-dire de la distribution $(p, 1-p)$ des travailleurs de différentes capacités ainsi que du coût de l'éducation. Comme le montre la figure 8.13, le bien-être du travailleur de type θ_H peut soit croître soit diminuer. Si la proportion p des travailleurs du type θ_H est faible, alors le salaire moyen $E(\theta)$ sera faible (figure 8.13.a). Dans ce cas, le bien-être de l'individu du type θ_H augmente car la courbe d'indifférence passant par le point $(0, E(\theta))$ est situé au-dessous de la courbe d'indifférence passant par le point $(\underline{e}, \theta_H)$. Si la proportion p est élevée, on aura la situation inverse, c'est-à-dire une diminution du bien-être du type θ_H (figure 8.13.b).

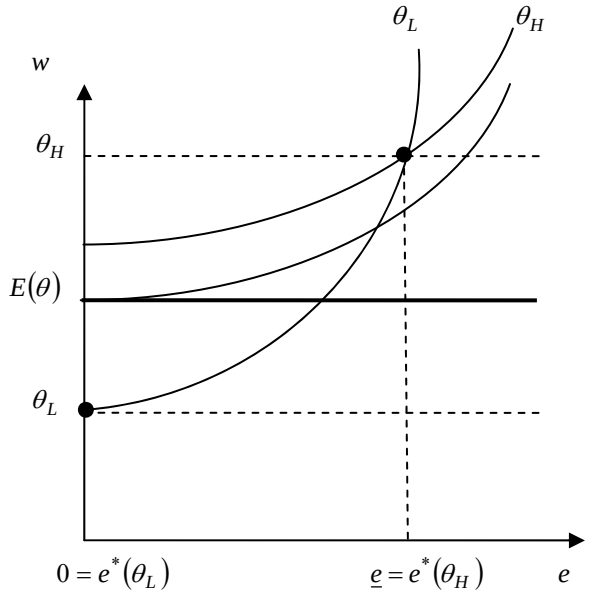


Figure 8.13.a : Cas où le bien-être du type θ_H augmente avec l'existence du signal

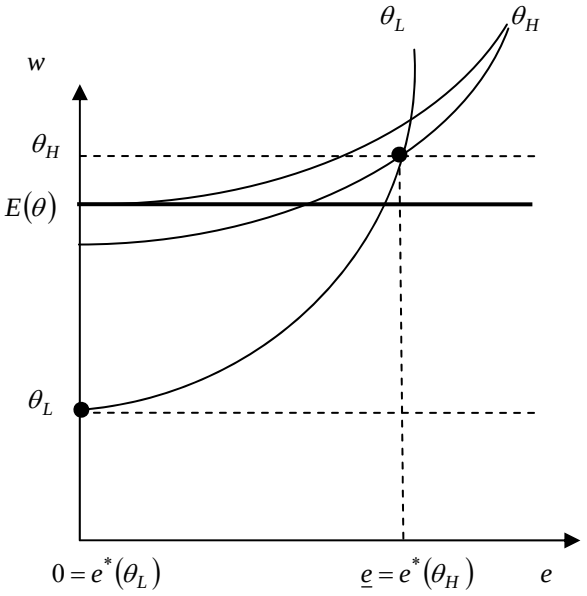


Figure 8.13.b : Cas où le bien-être du type θ_H diminue avec l'existence du signal

[133] Voir aussi Mas-Colell, Whinston & Green (1995), page 450.

Dans le cas de perte de bien-être, pourquoi le type θ_H choisit-il tout de même de signaler sa capacité productive. En fait, du moment qu'un mécanisme de signal existe, si le type θ_H ne choisit pas $\underline{e} = e^*(\theta_H)$, il sera considéré comme étant un travailleur de type θ_L et ne recevra de ce fait qu'un salaire de θ_L, ce qui correspond à un niveau de bien-être plus faible. La crainte de se voir catégoriser comme étant du type θ_L est la raison qui pousse le travailleur de type θ_H à choisir le niveau d'éducation $\underline{e}$.

L'existence d'un équilibre de signal permet à la collectivité d'identifier la capacité productive de chaque travailleur et donc d'affecter de façon optimale les travailleurs aux différents emplois. Mais cet effet bénéfique du signal peut être annihilé par le coût social du signal si ce dernier est très élevé. L'effet social du signal n'est donc pas tout à fait sans ambiguïté.

Chapitre 9 : La théorie de l'agence

La théorie de l'agence ou de la relation principal/agent ou encore de l'aléa moral traite des implications de l'asymétrie de l'information existant entre le principal et l'agent. Selon Jensen et Meckling (1976), « Une relation d'agence est un contrat par lequel une personne (le principal) engage une autre personne (l'agent) pour réaliser un service pour son compte impliquant la délégation d'une certaine autorité de décision ».[134]

Un des principaux thèmes abordés porte sur la forme optimale de rémunération de l'agent qui tienne compte de cette asymétrie de l'information. Dans l'exemple de la relation actionnaire/manager, le propriétaire ne peut observer parfaitement l'effort que consent le manager. Ou bien, le propriétaire peut observer cet effort mais avec un coût exorbitant. Ce type d'asymétrie est appelé *action cachée* (*hidden action*). De même, après la signature du contrat, le manager peut devenir mieux informé que le propriétaire sur les opportunités et les risques de l'entreprise. Ce type d'asymétrie est appelé *information cachée* (*hidden information*).

Etant donné le problème de non observabilité de l'effort du manager, l'actionnaire (le propriétaire individuel ou le conseil d'administration) aura à prévoir des mécanismes incitatifs pour amener indirectement l'agent à fournir l'effort nécessaire à la réalisation de l'objectif assigné.[135] L'un des thèmes majeurs de la théorie de l'agence est précisément d'étudier ce type de mécanismes incitatifs. Une des conclusions de la théorie de l'agence est que la présence post contractuelle d'asymétrie en information entraîne une diminution du bien-être des parties contractantes par rapport à un état où l'information est parfaite.

Au titre des applications du modèle principal / agent, nous montrerons comment ce modèle permet d'améliorer la compréhension du rationnement du crédit et de la structure du capital des entreprises.

9.1. L'effort de l'agent, une information asymétrique

La théorie de la relation principal/agent postule qu'il revient au principal de déterminer les modalités de partage du revenu y, c'est-à-dire la fonction de rémunération de l'agent en respectant certaines contraintes de *participation* et *d'incitation*.[136] Symbolisons par $e \in E$ l'effort consenti par le manager pour développer l'entreprise. Pour les commodités de l'analyse, on considèrera que $E \subset R$, c'est à dire que *e* est un scalaire.[137]

---

[134] M. Jensen and W. Meckling (1976). "Theory of the firm: managerial behaviour, agency costs, and ownership structure. Journal of Financial Economics. 3, 1976, pages 305-360.

[135] Relevons que les mécanismes de gouvernement d'entreprise sont des réponses, même imparfaites, de l'actionnariat au risque de l'aléa moral.

[136] Les notions de contraintes de participation et d'incitation sont développées plus loin.

[137] Il est évident que la description du travail de management par un scalaire ne peut rendre compte de toute la complexité de celui-ci. En réalité, pour tenir compte du caractère multidimensionnel des actions du repreneur, on devrait poser $E \subset R^n$, *n* quelconque et certainement grand.

Le niveau d'effort ou l'action est choisi de façon individuellement optimale par l'agent et affecte aussi bien son utilité que celle du principal. L'effort est source de désutilité pour l'agent. Mais pour le principal, un niveau élevé d'effort est préférable car cela augmente la probabilité des résultats élevés. Ce niveau d'effort n'est pas observable par le principal. En fait, le principal ne peut observer qu'une conséquence de l'effort de l'agent, laquelle dépend non seulement de l'effort e de l'agent, mais également d'un élément stochastique ε, ce qui donne $y = g(e, \varepsilon)$.

L'objectif du recrutement du manager est l'obtention d'un revenu maximal (profit, richesse) *y* qui revient au principal duquel est déduite la rémunération *t* de l'agent. Un point central de la théorie principal/agent est qu'il n'existe pas une relation déterministique entre le revenu et l'effort. La relation entre *y* et *e* est du type stochastique. Etant donné l'élément stochastique ε, le revenu *y* est une variable aléatoire dont la distribution est conditionnelle de l'effort *e* de l'agent. La densité de *y* conditionnelle à *e* est $f(y,e) > 0$ pour tout (y,e). Un niveau élevé d'effort e_H a un effet positif sur le revenu $y \in Y$ du principal plus fort qu'un niveau faible d'effort e_L. L'hypothèse admise pour exprimer la nature de cet effet est la dominance stochastique du premier ordre.[138] Nous dirons ainsi que la distribution de *y* étant donné e_H a une dominance stochastique du premier ordre par rapport à la distribution de *y* étant donné e_L. En d'autres termes, nous avons :

$$F(y/e_H) \leq F(y/e_L) \quad \text{ou} \quad F_e(y/e) \leq 0 \quad \text{pour tout } y \in Y \tag{9.1}$$

avec une inégalité stricte pour certaines valeurs de *y*.[139] La représentation graphique de la dominance stochastique du premier ordre dans le cas discret à deux niveaux d'effort est la suivante :[140]

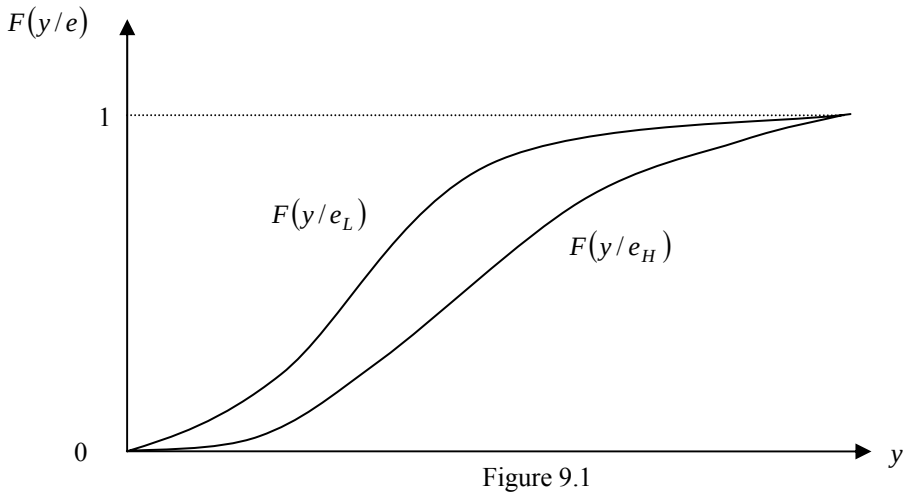


Figure 9.1

[138] Pour plus de détails sur la dominance stochastique, voir par exemple Viala, P & Briys E. (1995). *Eléments de théorie financière*. Nathan. Page 74.

[139] $F_e(y/e) = \frac{d}{de} F(y/e)$, ceci lorsque l'effort *e* est continu.

[140] Une conséquence de la dominance stochastique du premier ordre est que la valeur moyenne du revenu brut du principal lorsque $e = e_H$ est strictement supérieure à la valeur moyenne du revenu brut lorsque $e = e_L$. En d'autres termes, on a $\int_Y y\, f(y/e_H)\, dy > \int_Y y\, f(y/e_L)\, dy$.

Le manager a pour objectif la maximisation de son espérance d'utilité. Sa fonction d'utilité, supposée *séparable*, est composée d'une part de l'utilité de la rémunération $u(t)$, d'autre part de la désutilité de l'effort $w(e)$. L'utilité du manager est donc $U(t,e) = u(t) - w(e)$. Les caractéristiques des préférences du manager sont :

- $U_t(t,e) > 0$: Le manager préfère toujours une compensation plus élevée pour un effort donné.
- $U_{tt}(t,e) \leq 0$: Le manager a une aversion envers le risque (l'égalité correspond au cas de la neutralité envers le risque).
- $U(t,e_H) < U(t,e_L)$: Pour un revenu donné, le manager préfère moins d'effort.

Ces caractéristiques impliquent que : $u'(t) > 0$, $u''(t) \leq 0$ et $w'(e) > 0$

La fonction d'utilité du principal est $v(y - t(y))$ et possède les caractéristiques suivantes : $v' > 0$ et $v'' \leq 0$. L'objectif du principal est de maximiser son espérance d'utilité dont l'expression est :

$$E(v(y - t(y))) = \int_Y v(y - t(y))\, f(y,e)\, dy$$

Pour s'assurer que le manager accepte le contrat, le principal doit déterminer la fonction de rémunération $t(y)$ de telle sorte à respecter sa *contrainte de participation* dont l'expression est :

$$E(U(t,\, e)) = E(u(t)) - w(e) = \int_Y u(t(y)) f(y,e) dy - w(e) \geq U_0$$

U_0 est l'utilité de réservation de l'agent, c'est-à-dire l'utilité qu'il pourrait obtenir en dehors du contrat proposé par le principal. C'est le minimum que doit lui procurer le contrat pour qu'il l'accepte. En normalisant à 0 l'utilité de réservation de l'agent et en supposant qu'elle ne dépend pas du type de l'agent, la contrainte de participation de l'agent devient :

$$E(U(t,e)) = E(u(t)) - w(e) = \int_Y u(t(y)) f(y,e) dy - w(e) \geq 0$$

9.2. Relation principal / agent en cas d'observabilité de l'effort

A titre de benchmark et à l'effet de faire ressortir les effets de l'asymétrie d'information, il est d'usage de supposer dans un premier temps que le propriétaire peut observer l'effort du manager.[141] Dans ce cas, le propriétaire détermine le contrat en spécifiant d'une part le niveau d'effort *e* à consentir et d'autre part la fonction de rémunération $t(y)$. Le programme de maximisation du principal s'écrit donc :

[141] La rémunération du manager demeure cependant fonction du revenu brut *y*. On continuera donc à écrire *t* (*y*) en dépit de l'observabilité de l'effort *e*.

$$\underset{e,\ t}{\text{Max}} \int_Y v(y-t(y))\, f(y,e)dy \tag{9.2}$$

$$\text{s/c} \quad \int_Y u(t(y))\, f(y,e)dy - w(e) \geq 0 \tag{9.3}$$

A l'optimum, la contrainte de participation (9.3) de l'agent est saturée et est donc à l'égalité. Pour montrer cela, il suffit de considérer que le contraire est vrai. Supposons que l'agent obtienne une espérance d'utilité strictement supérieure à son utilité de réservation. Cette situation ne peut constituer la solution du programme du principal car ce dernier peut, tout en continuant à respecter l'utilité de réservation de l'agent, diminuer la rémunération de l'agent, ce qui a pour conséquence d'augmenter son utilité. En symbolisant par μ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de participation de l'agent, le programme du principal peut être réécrit comme suit :

$$\underset{e,t}{\text{Max}}\, L = \int_Y v(y-t(y))\, f(y,e)dy + \mu\left[\int_Y u(t(y))\, f(y,e)dy - w(e)\right]$$

Les conditions du premier ordre sont :[142]

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -v'(y-t(y))\, f(y,e) + \mu[u'(t(y))\, f(y,e)] = 0 \text{ pour tout } y.$$ [143]

$$-v'(y-t(y)) + \mu\, u'(t(y)) = 0 \quad \text{pour tout } y$$

$$\frac{v'(y-t(y))}{u'(t(y))} = \mu \text{ pour tout } y \tag{9.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial e} = \int_Y v(y-t(y))\, f_e(y,e)dy + \mu\left[\int_Y u(t(y))\, f_e(y,e)dy - w'(e)\right] = 0$$

$$\int_Y [v(y-t(y)) + \mu\, u(t(y))] f_e(y,e)dy = \mu\, w'(e) \tag{9.5}$$

---

[142] $f_e(y,e) = \frac{d}{de} f(y,e)$

[143] Pour la compréhension de la dérivation de, par exemple, $\int_Y v(y-t(y))\, f(y,e)dy$, il suffit de considérer la version discrète de la question. On a dans ce cas $E(v(y-t(y))) = \sum_i v(y_i - t(y_i)) \cdot p(y_i, e)$ et la dérivée par rapport à t est $\sum_i -v'(y_i - t(y_i)) \cdot p(y_i, e)$. Cette dérivée est égale à zéro si $-v'(y_i - t(y_i)) \cdot p(y_i, e) = 0$ pour tout y_i.

La condition du premier ordre (9.4) signifie «l'égalité des taux marginaux de substitution du revenu entre les différents états de la nature caractérisés ici par la valeur de y ».[144] Pour montrer cela, on peut écrire la condition du premier ordre comme suit pour deux niveaux différents de revenu y et y' :

$$\frac{v'(y-t(y))}{v'(y'-t(y'))}=\frac{u'(t(y))}{u'(t(y'))} \tag{9.6}$$

Cette égalité peut être interprétée en se référant à la boîte d'Edgeworth en considérant que les revenus différents y et y' représentent deux états différents de la nature. Dans ce cas, l'équation (9.6) exprime l'égalité des taux marginaux de substitution du principal et de l'agent, ce qui correspond, comme le montre la figure 9.2 à un partage optimal du risque :

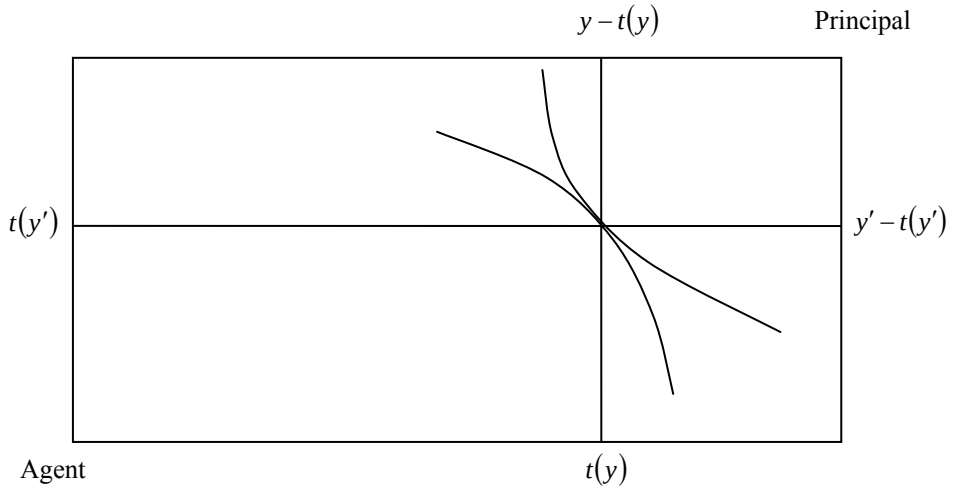


Figure 9.2 : Boîte d'Edgeworth et partage optimal de risque

Cette condition indique donc qu'en situation de symétrie de l'information, il existe un *partage optimal du risque* entre le principal et l'agent. On obtient un cas particulier intéressant lorsqu'on considère que le principal est neutre vis-à-vis du risque.[145] Dans ce cas, étant donné que $v'(y-t(y))=1$, la première condition du premier ordre s'écrit comme suit :[146]

$$\frac{1}{u'(t(y))}=\mu \text{ pour tout } y \tag{9.7}$$

Le manager étant averse pour le risque, $u'(t(y))$ est décroissante par rapport à $t(y)$. Par conséquence, la satisfaction de la condition (9.7) implique que la rémunération $t(y)$ doit être fixe par rapport à y. En recevant une rémunération fixe, le manager est complètement assurée contre le risque par le principal. Etant donnée sa neutralité envers le risque, le principal joue un rôle d'assurance. Le contrat constitue ainsi un partage optimal du risque entre le principal et l'agent.

[144] Voir Laffont, J.J. 1991. P 191.
[145] Par exemple en raison d'une richesse très élevée ou d'une bonne diversification des actifs.
[146] On considère qu'en cas de neutralité envers le risque, l'utilité marginale de la monnaie est de 1.

La contrainte de participation du manager étant saturée, on a donc pour chaque niveau d'effort optimal $u(t^*) - w(e^*) = 0$. La rémunération fixe du manager est donc $t^* = u^{-1}(w(e^*))$, ce qui donne la proposition suivante :

Proposition : Dans le modèle principal/agent avec observabilité de l'effort du manager et neutralité au risque du principal, le contrat optimal spécifie l'effort optimal e^* choisi par le manager (maximisant le revenu espéré du propriétaire déduction faite de la rémunération du manager) et procure au manager une *rémunération fixe* $t^* = u^{-1}(w(e^*))$.[147]

Cette proposition signifie que lorsque l'effort est observable et le principal neutre envers le risque, le manager n'a pas besoin de recevoir d'incitation à l'effort. Sa rémunération est dans ce cas fixe et constitue de ce fait une assurance contre le risque (dû au caractère aléatoire de *y*) procurée par le propriétaire, lequel, supposé neutre vis-à-vis du risque, joue le rôle d'assureur.

9.3. Relation principal / agent en cas de non observabilité de l'effort

Considérons maintenant que l'effort de l'agent n'est pas observable par le principal. La rémunération fixe ne demeure plus optimale car *ex post* l'agent *est incité à dévier* et à ne pas fournir le niveau d'effort spécifié dans le contrat. Ce dernier doit donc intégrer cette possibilité de déviation *ex post* et tenir compte de la meilleure réponse de l'agent. Cette condition est satisfaite par l'introduction dans le programme du principal d'une nouvelle contrainte, appelée *contrainte d'incitation*. Lors du choix de son niveau optimal de l'effort, l'agent doit également intégrer la meilleure réponse du principal. Le contrat ainsi obtenu constitue un équilibre de Nash du jeu liant le principal et l'agent.

Pour amener l'agent à respecter ses engagements, le principal se voit donc contraint de prévoir une forme de rémunération incitant l'agent à fournir l'effort désiré par le principal, c'est à dire une rémunération liée au résultat *y* de l'effort. Sachant que le résultat *y* est aléatoire, la rémunération $t(y)$ devient à son tour aléatoire. L'incitation à l'effort du manager implique donc pour celui-ci l'obligation de supporter un niveau de risque plus élevé. Il existe ainsi un arbitrage entre le partage optimal du risque et l'incitation du manager à fournir l'effort optimal.

9.3.1. Modèle de l'aléa moral en cas avec deux niveaux d'effort

9.3.1.1. Partage optimal du risque et incitation à l'effort

Considérons dans un premier temps qu'il n'existe que deux niveaux d'effort possibles, un niveau élevé e_H et un niveau faible e_L. On a donc $E = \{e_H, e_L\}$. L'effort du manager n'étant plus observable, le programme d'optimisation du principal doit intégrer une nouvelle contrainte, appelée *contrainte d'incitation* pour exprimer le fait que l'agent choisit le niveau d'effort optimal étant donnée la fonction de rémunération $t(y)$. Le cas où le choix du principal

[147] Voir Mas Colleil, Whinston & Green, p 481.

porte sur le niveau d'effort faible e_L est relativement simple. En effet, comme l'effort est coûteux pour l'agent, il aura naturellement tendance à choisir un niveau d'effort faible. Il suffit donc au principal de retenir une rémunération fixe égale à $t_L^* = u^{-1}(w(e_L))$. L'agent choisira alors le niveau d'effort souhaité par le principal.

Supposons maintenant que le principal veuille induire l'agent à choisir le niveau élevé d'effort e_H. La contrainte d'incitation prend alors la forme suivante :

$$\int_Y u(t(y)) f(y/e_H) dy - w(e_H) \geq \int_Y u(t(y)) f(y/e_L) dy - w(e_L) \tag{9.8}$$

Cette contrainte signifie que le principal doit définir une fonction de rémunération $t(y)$ de telle sorte qu'en maximisant son espérance d'utilité, l'agent choisira par lui-même le niveau élevé de l'effort. Le contrat optimal est donc le résultat du programme suivant du principal :

$$\begin{aligned}
&\underset{t}{\text{Max}} \int_Y v(y - t(y)) f(y/e_H) dy \\
&\text{s/c} \quad \int_Y u(t(y)) f(y/e_H) dy - w(e_H) \geq 0 \\
&\qquad \int_Y u(t(y)) f(y/e_H) dy - w(e_H) \geq \int_Y u(t(y)) f(y/e_L) dy - w(e_L)
\end{aligned}$$

En appelant η le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incitation, le Lagrangien du programme du principal devient :

$$\begin{aligned}
\underset{t}{\text{Max}}\, L = &\int_Y v(y - t(y)) f(y/e_H) dy + \mu \left[\int_Y u(t(y)) f(y/e_H) dy - w(e_H) \right] \\
&+ \eta \left[\int_Y u(t(y)) f(y/e_H) dy - w(e_H) - \left(\int_Y u(t(y)) f(y/e_L) dy - w(e_L) \right) \right]
\end{aligned}$$

Avec $t'(y) \neq 0$, la condition du premier ordre est :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial t} = &-v'(y - t(y)) f(y/e_H) + \mu [u'(t(y)) f(y/e_H)] \\
&+ \eta [u'(t(y)) f(y/e_H) - u'(t(y)) f(y/e_L)] = 0
\end{aligned} \quad \text{pour tout } y$$

En considérant le cas où le principal est neutre vis-à-vis du risque, on a $v'(y - t(y)) = 1$ et cette condition s'écrit :

$$-f(y/e_H)+\mu[u'(t(y))f(y/e_H)]+\eta u'(t(y))[f(y/e_H)-f(y/e_L)]=0 \text{ pour tout } y.$$

En divisant par $u'(t(y))f(y/e_H)$, on obtient la caractéristique suivante du contrat optimal :

$$-\frac{1}{u'(t(y))}+\mu+\eta\left(\frac{f(y/e_H)-f(y/e_L)}{f(y/e_H)}\right)=0 \text{ pour tout } y$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{u'(t(y))}=\mu+\eta\left(1-\frac{f(y/e_L)}{f(y/e_H)}\right) \text{ pour tout } y \tag{9.9}$$

Cette condition du premier ordre implique la proposition suivante :

Proposition (Holmström (1979) et Shavell (1979)) : Sous les hypothèses que $u''<0$, $v'>0$ et $F(y/e_H)\leq F(y/e_L)$ (avec une inégalité stricte pour certaines valeurs de *y*), alors $\eta>0$.[148]

Cette proposition signifie qu'en cas d'asymétrie d'information, le contrat ne procure plus de partage optimal du risque entre le principal et l'agent. Cette *inefficience* dans le partage du risque a pour effet la *réduction du bien-être* d'au moins une partie et provient de la nécessité de relier la rémunération du manager au résultat *y*, car son effort n'est plus observable par le principal. Par exemple, lorsque le principal est neutre envers le risque, la rémunération fixe, quand bien même réaliserait-elle un partage optimal du risque, n'est plus optimale pour le principal car elle ne procure pour l'agent aucune incitation à l'effort.

L'introduction de la contrainte d'incitation dans le programme du principal montre qu'il existe ainsi un arbitrage entre deux sous-objectifs, à savoir le partage optimal du risque et l'incitation à l'effort. Ceci constitue un des principaux résultats de la théorie de l'agence.

9.3.1.2. L'incitation du manager (l'agent)

Abordons maintenant la question de la forme générale de la fonction de rémunération $t(y)$. L'intuition voudrait que pour inciter le manager à fournir un effort élevé, il suffirait que la fonction $t(y)$ soit croissante, c'est-à-dire que le manager devrait recevoir une rémunération d'autant plus élevée que le résultat observé *y* est élevé. La forme générale de $t(y)$ peut être obtenue à partir de l'équation (9.9) caractérisant le contrat optimal. Il suffit de différencier (dériver par rapport à *y*) cette équation par rapport à *y*, ce qui donne :

[148] Pour la démonstration, voir Holmström, B. 1979. P 90.

$$\frac{-u''(t(y))t'(y)}{(u'(t(y)))^2} = -\eta\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{f(y/e_L)}{f((y/e_H))}\right)$$

On obtient ainsi l'expression suivante de $t'(y)$:

$$t'(y) = \eta\frac{(u'(t(y)))^2}{u''(t(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{f(y/e_L)}{f((y/e_H))}\right) \tag{9.10}$$

Etant donnée l'aversion pour le risque de l'agent, on a $u'' < 0$. Par la proposition ci-dessus, on a également $\eta > 0$. Donc, selon l'équation (9.10), pour que la rémunération optimale $t(y)$ du manager soit croissante par rapport au résultat *y*, une condition supplémentaire est requise. Il s'agit de l'hypothèse appelée *condition de rapport de vraisemblance monotone* (MLRP – *Monotone Likelihood Ratio Property*) et dont l'expression est :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(y/e_L)}{f(y/e_H)}\right) < 0 \tag{9.11}$$

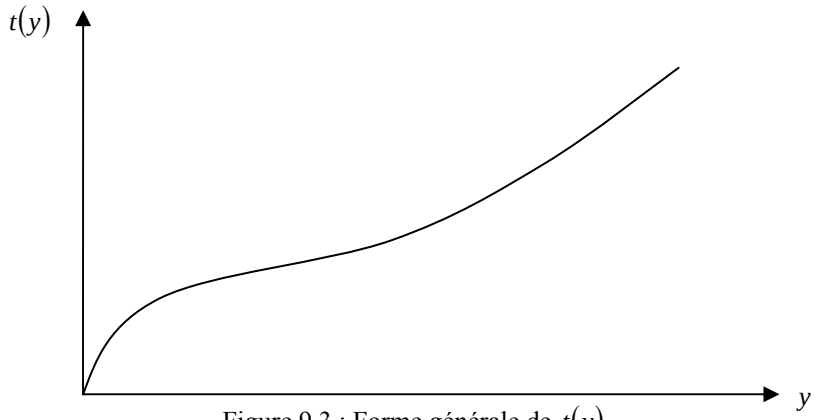


Figure 9.3 : Forme générale de $t(y)$

Graphiquement, sous cette condition, la relation entre la rémunération de l'agent $t(y)$ et le revenu brut *y* peut être représentée par la figure 9.3.

A titre d'illustration, nous donnons un exemple de distributions de probabilité discrètes $P(y/e_H)$ et $P(y/e_L)$ satisfaisant la condition MLRP avec l'ensemble des résultats possibles $Y = \{1, 2, 3, 4\}$:[149]

[149] Pour ce tableau, on a $F(y/e_H) = P(Y \le y/e = e_H)$ et $F(y/e_L) = P(Y \le y/e = e_L)$.

Tableau 9.1

Y	***P(y / e_H)***	***P(y / e_L)***	$F(y / e_H)$	$F(y / e_L)$	Dominance stochastique du premier ordre $F(y / e_H)$- $F(y / e_L)$	MLRP $\frac{P(y/e_L)}{P(y/e_H)}$
			0	0	0	
1	**0,1**	**0,4**	0,1	0,4	- 0,3 ≤ 0	4
2	**0,2**	**0,3**	0,3	0,7	- 0,4 ≤ 0	1,5
3	**0,4**	**0,3**	0,7	1	- 0,3 ≤ 0	0,75
4	**0,3**	**0**	1	1	0	0

Ce tableau montre que la condition du rapport de vraisemblance monotone –MLRP- signifie qu'au fur et à mesure qu'augmente le niveau du résultat observé par le principal, la vraisemblance de l'effort élevé e_H devient de plus en plus élevée par rapport à la vraisemblance de l'effort faible e_L. Ceci implique qu'il est possible d'inciter le manager à fournir un effort élevé en prévoyant une rémunération croissante par rapport à y.

Dans ce cas, si par exemple le résultat observé par le principal passe de 2 à 3, alors la rémunération de l'agent augmentera car la vraisemblance que ce résultat soit le produit d'un effort élevé e_H est plus grande que celle d'un effort faible e_L. Mais si par contre, le résultat observé est $y = 1$, la vraisemblance d'un effort faible est très forte par rapport à celle d'un effort élevé. Ceci justifierait que la rémunération de l'agent soit faible même s'il existe une probabilité (faible) que ce faible résultat soit associé à un effort élevé.

9.3.2. Modèle de l'aléa moral en cas d'effort continu

9.3.2.1. Partage optimal du risque et incitation à l'effort : l'approche du premier ordre

Nous considérons maintenant le cas plus général où l'effort est une variable continue, c'est-à-dire $e \in E \subset R$. Comme pour le cas de deux niveaux d'effort, l'effort du manager n'étant plus observable, le programme d'optimisation du principal doit intégrer une contrainte, appelée *contrainte d'incitation* qui permet de caractériser le niveau d'effort optimal choisi par l'agent étant donnée la fonction de rémunération $t(y)$. Cette contrainte d'incitation prend la forme générale suivante :

$$e \in \arg\max_{e' \in E} \int_Y u(t(y)) f(y, e') dy - w(e') \tag{9.12}$$

La contrainte d'incitation (9.12) signifie que parmi les efforts possibles e', le manager choisit de façon rationnelle le niveau d'effort e qui maximise son espérance d'utilité. Cette contrainte signifie donc qu'étant donnée la fonction de rémunération $t(y)$, le manager choisit le niveau

d'effort *e* qui soit sa *meilleure réponse*. L'expression (9.12) peut avoir plusieurs solutions. *L'approche du premier ordre* de la théorie de l'agence consiste à remplacer la contrainte d'incitation (9.12) par sa condition du premier ordre et qui est :

$$\int_Y u(t(y)) f_e(y,e)dy - w'(e) = 0 \tag{9.13}$$

Cette approche suppose que la condition du premier ordre (9.13) définit une solution *unique* et qui est un *maximum*.[150]

Comme dans le cas de deux niveaux d'effort, à l'optimum la contrainte de participation de l'agent est saturée (à l'égalité). En appelant η le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incitation, le Lagrangien du programme du principal devient :

$$\underset{e,t}{\text{Max}}\, L = \int_Y v(y - t(y)) f(y,e)dy + \mu\left[\int_Y u(t(y)) f(y,e)dy - w(e)\right] + \eta\left[\int_Y u(t(y)) f_e(y,e)dy - w'(e)\right]$$

La condition du premier ordre de ce nouveau programme est :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -v'(y - t(y)) f(y,e) + \mu[u'(t(y)) f(y,e)] + \eta[u'(t(y)) f_e(y,e)] = 0 \quad \text{pour tout } y$$

$$\frac{-v'(y - t(y))}{u'(t(y))} + \mu + \eta \frac{f_e(y,e)}{f(y,e)} = 0 \quad \text{pour tout } y$$

$$\frac{v'(y - t(y))}{u'(t(y))} = \mu + \eta \frac{f_e(y,e)}{f(y,e)} \quad \text{pour tout } y \tag{9.14}$$

La deuxième condition du premier ordre est :

$$\frac{\partial L}{\partial e} = \int_Y v(y - t(y)) f_e(y,e)dy + \mu\left[\int_Y u(t(y)) f_e(y,e)dy - w'(e)\right] + \eta\left[\int_Y u(t(y)) f_{ee}(y,e)dy - w''(e)\right] = 0$$

[150] Nous verrons plus loin quelles sont les conditions de validité de l'approche du premier ordre.

Etant donné que $\left[\int_Y u(t(y))f_e(y,e)dy - w'(e)\right] = 0$, cette condition du premier ordre devient :

$$\int_Y v(y-t(y))f_e(y,e)dy + \eta\left[\int_Y u(t(y))f_{ee}(y,e)dy - w''(e)\right] = 0 \qquad (9.15)$$

La condition du premier ordre implique la proposition suivante :

Proposition (Holmström (1979), Shavell (1979)) : Sous les hypothèses que $u'' < 0$, $v' > 0$ et $F_e \leq 0$ (avec une inégalité stricte pour certaines valeurs de *y*), alors $\eta > 0$.[151]

Comme dans le cas de deux niveaux d'effort, cette proposition signifie que le contrat ne procure plus de partage optimal du risque entre le principal et l'agent. L'effort de l'agent n'étant plus observable par le principal, ce dernier doit prévoir une rémunération qui incite l'agent à l'effort, ce qui a pour conséquence de réduire sa couverture contre le risque dû au caractère aléatoire de *y*. L'existence de l'asymétrie de l'information oblige les deux parties au contrat à arbitrer entre le partage optimal du risque et l'incitation à l'effort.

9.3.2.2. L'incitation du manager (l'agent)

Comme dans le cas de deux niveaux d'effort, la forme générale de la fonction de rémunération $t(y)$ peut être obtenue. Pour montrer cela, il suffit de différencier (dériver par rapport à *y*) l'équation (9.14).

$$\frac{v''(y-t(y))(1-t'(y))u'(t(y)) - u''(t(y))t'(y)v'(t(y))}{(u'(t(y)))^2} = \eta\frac{\partial}{\partial y}\frac{f_e(y,e)}{f(y,e)}$$

On obtient ainsi l'expression suivante de $t'(y)$:

$$t'(y) = \frac{u'(t(y))\cdot v''(y-t(y)) - \eta[u'(t(y))]^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\frac{f_e(y,e)}{f(y,e)}}{u'(t(y))\cdot v''(y-t(y)) + u''(t(y))\cdot v'(y-t(y))} \qquad (9.16)$$

Pour les mêmes raisons que dans le cas de deux niveaux d'effort, l'équation (9.16) montre que la rémunération optimale $t(y)$ du manager n'est croissante par rapport au résultat *y* que sous

[151] Pour la démonstration, voir Holmström, B. 1979. P 90.

l'hypothèse supplémentaire de la *condition de rapport de vraisemblance monotone* (MLRP – *Monotone Likelihood Ratio Property*) qui a pour expression :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_e(y,e)}{f(y,e)}\right) > 0 \tag{9.17}$$

L'expression (9.17) est la version continue de la MLRP (équation 9.11).

Comme mentionné plus haut, l'approche du premier ordre consiste à remplacer la contrainte d'incitation (9.12) par la condition du premier ordre (9.13). Pour être suffisante, cette transformation du programme d'optimisation du principal nécessite l'introduction d'une nouvelle hypothèse qui est la convexité de la fonction de répartition *F* par rapport à l'effort *e* qui est, selon Rogerson (1985) «une forme de rendement d'échelle stochastique décroissant ».[152] En l'absence de cette nouvelle hypothèse, Grossman et Hart (1983) ont proposé une approche coût/bénéfice en deux étapes dans le cas où l'ensemble *Y* est discret et le principal neutre envers le risque.[153]

9.4. Application 1 : aléa moral et rationnement du crédit

La théorie du rationnement du crédit est une application importante du modèle principal / agent. En d'autres termes, l'existence du rationnement du crédit peut être expliquée par celle du problème de l'aléa moral entre le préteur (par exemple la banque) et l'emprunteur. On dit qu'il existe une situation de rationnement du crédit lorsque le prêteur n'est pas disposé à accorder un crédit même si l'emprunteur concerné par ce refus accepte de payer un taux d'intérêt supérieur au taux d'intérêt en vigueur.[154]

Cette caractéristique constitue une différence fondamentale du concept d'équilibre entre le marché du crédit et le marché des biens. Pour ce dernier, le prix d'équilibre est obtenu lorsque l'offre est égale à la demande. Si la demande est supérieure (resp. inférieure) à l'offre, le rétablissement de l'équilibre s'obtient par l'augmentation (resp. la diminution) du prix.

Ce mécanisme de l'équilibre ne se retrouve pas complètement dans le marché du crédit. En effet, le prêteur peut refuser de satisfaire une demande de crédit même si l'emprunteur est disposé à accepter un taux d'intérêt plus élevé. L'équilibre du marché n'est pas obtenu ici par l'augmentation du taux d'intérêt puisque une demande disposée à accepter un prix plus élevée

[152] W. Rogerson (1985). "The first-order approach to principal-agent problems". *Econometrica*, 53. Pages 1357-1368.
[153] S. Grossman & O. Hart (1983). "An analysis of the principal-agent problem". *Econometrica*, 51. Pages 7-45.
[154] Il existe plusieurs situations de rationnement. Le cas le plus connu est celui de la situation de guerre. La rareté des biens est tellement forte que l'Etat se voit obligé d'intervenir dans la sphère commerciale pour réguler la commercialisation des produits, en particulier ceux de première nécessité (pain, huile, sucre, …). On trouve également le rationnement dans les économies planifiées, notamment pour les importations qui sont limitées quantitativement de façon centralisée.

ne trouve pas l'offre correspondante. Cette situation est qualifiée de rationnement du crédit et est donc une caractéristique fondamentale du marché du crédit.

Parmi les explications possibles à l'existence du rationnement de crédit à l'équilibre du marché du crédit figure celle de l'aléa moral.[155] A la base de cette explication, il faut d'abord remarquer que plus le taux d'intérêt est élevé, moins est grande la part des bénéfices revenant à l'emprunteur. Ceci a pour effet de réduire son incitation à fournir un effort plus élevé, ce qui a pour conséquence d'augmenter la probabilité d'échec du projet financé. Ainsi, l'augmentation du taux d'intérêt peut avoir pour effet d'augmenter le risque pour le prêteur et ne constitue donc pas une réponse tout à fait adéquate pour la couverture contre le risque. Dans ce cas, le projet n'est financé par le prêteur que si le montant des capitaux propres atteint un montant approprié. De ce fait, l'existence de l'aléa moral devient une explication possible de la structure du capital et de la notion de capacité d'endettement.

Pour montrer cela, considérons un entrepreneur qui envisage de réaliser un projet dont le coût d'investissement est *I*.[156] Son apport personnel sous forme de capitaux propres (cash) est *A* avec $A < I$. Pour la réalisation de ce projet, il doit donc recourir à un financement externe d'un montant égal à $I - A$. En cas de succès, le projet procure un revenu global égal à *R* et en cas d'échec, le revenu global est 0. La probabilité de succès dépend du comportement de l'entrepreneur. Cette probabilité est élevée p_H si l'entrepreneur fournit un effort élevé (*comportement loyal*) pour la réussite du projet. Par contre, si l'entrepreneur ne fournit pas un effort élevé pour le projet (*comportement déloyal*), la probabilité de réussite devient faible p_L, mais l'entrepreneur obtiendra dans ce cas des *bénéfices privés B*. On a évidemment $p_H > p_L$. En cas de succès, la part revenant à l'entrepreneur (insider) est R_i et la part revenant au financier (outsider) est R_o, avec $R = R_i + R_o$.

Pour simplifier l'exposé, supposons que l'entrepreneur (qui bénéficie de la responsabilité limitée) et le financier sont neutres envers le risque et que le taux d'intérêt est égal à 0. Considérons également qu'en raison de la concurrence entre les financiers, le profit espéré du financier est nul, ce qui donne $p_H \cdot R_o - (I - A) = 0$. La réalisation du projet s'effectue selon le timing suivant :

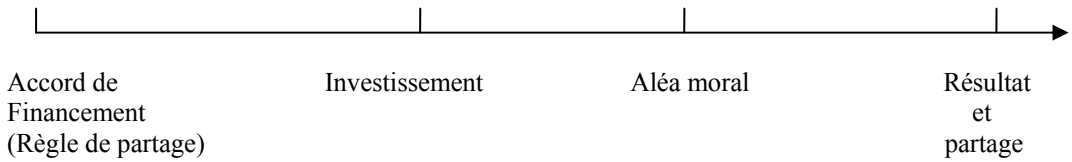


Figure 9.4

On supposera également que le projet n'est viable que si l'entrepreneur se comporte loyalement, ce qui donne une valeur actuelle nette du projet conditionnelle au comportement

[155] Stiglitz, Joseph et Andrew Weiss. *Credit Rationing in Markets with Imperfect Information*. The American Economic Review. Vol 71, n° 3. June 1981.
Le phénomène de sélection adverse est également une explication possible du rationnement du crédit dans le marché du crédit.
[156] Voir aussi J. Tirole (2001) « Corporate Governance », *Econometrica*, 69. Pages 1-35.

loyal $VAN_H = p_H \cdot R - I > 0$. En cas de comportement déloyal de l'entrepreneur, la valeur actuelle nette du projet est négative, ce qui donne $VAN_L = p_L \cdot R + B - I < 0$.

Comme le projet n'a une valeur actuelle nette positive qu'en cas de comportement loyal, le contrat de financement doit être conçu de telle sorte à inciter l'entrepreneur à se comporter de façon loyale. Cette exigence est formalisée à travers la *contrainte d'incitation* suivante :

$$p_H \cdot R_i \geq p_L \cdot R_i + B$$

Ceci qui donne $R_i \geq \frac{B}{\Delta p}$ avec $\Delta p = p_H - p_L$. En d'autres termes, afin d'inciter l'entrepreneur à se comporter de façon loyale, le revenu R_i qui doit lui revenir doit être au moins égal à $B/\Delta p$. Sachant que $R_i = R - R_o$, cette contrainte d'incitation implique $R - R_o \geq \frac{B}{\Delta p}$, soit $R_o \leq R - \frac{B}{\Delta p}$. En d'autres termes, à partir de la contrainte d'incitation, il ressort que le montant maximal pouvant être *gagé* (réservé) en faveur du financier sans compromettre l'incitation de l'entrepreneur est $R - \frac{B}{\Delta p}$. Le montant espéré maximum pouvant être gagé est donc $p_H\left(R - \frac{B}{\Delta p}\right)$.

La contrainte d'incitation $R_o \leq R - \frac{B}{\Delta p}$ et l'équilibre financier des apporteurs de fonds $P_H \cdot R_o = I - A$ impliquent que $p_H\left(R - \frac{B}{\Delta p}\right) \geq I - A$, c'est-à-dire :

$$A \geq \overline{A} = \left(p_H \frac{B}{\Delta p}\right) - \left(p_H R - I\right)$$

La quantité $\overline{A}$ que nous assumons être positive est donc le montant minimal exigé de l'entrepreneur pour que le financement externe d'un montant égal à $I - A$ lui soit accordé. Nous avons ainsi une théorie explicative de l'existence d'une structure optimale du capital basée sur l'existence du phénomène de l'aléa moral.[157] Le minimum requis a donc la forme suivante :

$$\overline{A} = \left\{\begin{matrix}\text{Rente} \\ \text{d'agence}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{Valeur Actuelle Nette étant} \\ \text{donné un comportement loyal}\end{matrix}\right\}$$

[157] Relevons que cette théorie de la structure du capital base l'explication de la structure du capital du côté de l'offre du financement.

Pour l'interprétation de la quantité $\overline{A}$, rappelons que la contrainte d'incitation de l'entrepreneur implique que $R_i \geq \frac{B}{\Delta p}$, ce qui donne $p_H \cdot R_i \geq p_H \cdot \frac{B}{\Delta p}$. Donc $p_H \cdot \frac{B}{\Delta p}$ est le revenu espéré minimum à laisser à l'entrepreneur pour satisfaire sa contrainte d'incitation. Pour cela, la quantité $p_H \cdot \frac{B}{\Delta p}$ est appelée "rente d'agence".

Cette exigence en fonds propres peut-être interprétée comme suit : la rente d'agence est le revenu minimal que doit obtenir l'entrepreneur pour l'amener à se comporter de façon loyale. Pour cela, l'apport de l'entrepreneur doit être au moins égal à cette somme. De ce fait, cette avance constitue une assurance crédible donnée par l'entrepreneur pour garantir que son comportement sera loyal. Cette exigence est réduite du montant de la VAN car cette dernière sera donnée par le projet.

Pour illustrer la détermination de la contribution minimale de l'entrepreneur en cas d'aléa moral, considérons la simulation suivante d'un projet d'investissement dont le coût de réalisation est $I = 1000$. La probabilité de succès est de 0,8 en cas de comportement loyal de l'entrepreneur et de 0,6 en cas de comportement déloyal de l'entrepreneur.

Au titre de la simulation1, le revenu (cash-flow) du projet est de 1300 et le bénéfice privé est de 200. Au titre de la simulation 2, le revenu (cash-flow) du projet est de 1450 et le bénéfice privé est de 50. Dans les deux simulations, le revenu global du projet est de 1 500, mais dans la simulation 1, la proportion des bénéfices privés est plus grande. Il s'ensuit que dans la simulation 1, l'incitation au comportement déloyal est plus grande. Par conséquence, la contribution en fonds propres exigé de l'entrepreneur dans la simulation 1 est plus importante. Le tableau 9.2 fait bien ressortir ce résultat intuitif.

Dans la simulation 1, le risque moral est élevé puisqu'en se comportant de façon déloyale, l'entrepreneur peut obtenir des bénéfices privés de 200. Ces derniers constituent donc une importante incitation à ne pas fournir l'effort nécessaire pour augmenter la probabilité de réussite du projet. La meilleure réponse du financier externe (outsider) est d'exiger un important taux d'autofinancement minimal de **76%** ceci afin de contrecarrer cet aléa moral et créer ainsi une contre incitation.

Dans le cas de la simulation 2, l'aléa moral est relativement faible ce qui justifie que le taux d'autofinancement minimal exigé par le financier n'est que de **4%**.

Tableau 9.2

Simulation du modèle de rationnement du crédit dans le cas d'aléa moral				
Le projet				
Coût de l'investissement	I		1.000	
Probabilité de succès si comportement loyal	P_H		0.8	
Probabilité de succès si comportement déloyal	p_L		0.6	
Revenus du projet			**Simulation 1**	**Simulation 2**
Revenu (apparent) du projet	R		1.300	1.450
Bénéfices privés	B		200	50
Résultats			**Simulation 1**	**Simulation 2**
Valeur Actuelle Nette	**cl***	$(P_H \cdot R - I)$	40	160
	cd*	$(P_L \cdot R + B) - I$	-20	-80
Rente d'agence		$P_H \cdot (B/\Delta P)$	800	200
Apport minimal en fonds propres de l'entrepreneur	$\overline{A}$	$P_H \cdot (B/\Delta P) - (P_H \cdot R - I)$	760	40
Taux d'autofinancement minimal exigé		$\overline{A}/I$	**76%**	**4%**

* **cl** : Si comportement loyal. **cd** : Si comportement déloyal

Cette théorie permet d'expliquer pourquoi dans certains pays, les banques exigent des niveaux importants de taux d'autofinancement et également de garanties. Ces banques étant confrontées à un niveau élevé d'aléa moral, leur meilleure réponse est d'exiger de l'emprunteur de s'engager de façon substantielle.[158] Le niveau élevé d'aléa moral est favorisé par plusieurs phénomènes tels que :

- Système judiciaire ne protégeant pas suffisamment les créanciers (par exemple pour la mise en jeu des garanties) ;
- Information comptable manquant de fiabilité et de transparence ;
- Structure familiale des entreprises privées qui peut être un élément favorable à la collusion des actionnaires contre les outsiders ;
- Aléa moral au sein même de la banque d'Etat.

9.5. Application 2 : aléa moral et structure de la propriété des entreprises

La théorie de la structure du capital est un des thèmes majeurs de la finance d'entreprise. L'objectif de cette théorie est de tenter d'expliquer les choix de la firme en matière de financement. Plus particulièrement, la théorie s'est concentrée sur l'explication des proportions des fonds propres S et de la dette B dans le financement de la firme. Ces

[158] Cette conclusion est soutenue également par la théorie "Law and Finance". Voir R. La Porta, Lopez-de-Silanes, F, Shleifer, A et Vishny, R. « Law and Finance ». *Journal of Political Economy*, Vol 106, n° 6.

proportions, c'est-à-dire les rapport $\frac{S}{S+B}$ et $\frac{B}{S+B}$ représentent la structure du capital de la firme. Les premières tentatives formalisées reviennent à Modigliani et Miller (M&M) qui ont développé un modèle explicatif en se basant sur l'équilibre du marché financier, supposé parfait.[159] Avec V_L représentant la valeur totale de la firme endettée et V_u la valeur totale de la firme sans dette et en prenant en considération l'existence de l'impôt sur le revenu de la firme au taux τ, M&M ont montré que la valeur totale de la firme est donnée par l'équation suivante :

$$V_L = V_u + \tau B$$

Comme conséquence de cette équation, la structure optimale du capital de la firme est atteinte lorsque la dette *B* représente 100% du financement de la firme. Il s'agit évidemment d'une conclusion extrême qui de plus, ne correspond pas à la réalité des entreprises. Cette difficulté n'enlève cependant en rien à la rigueur de l'analyse de M&M.

La littérature s'est par la suite attachée à relaxer les constituants de l'hypothèse de marché financier parfait afin de rajouter du réalisme à la théorie et de produire des résultats plus conformes à la réalité. Parmi ces facteurs, figure celui du problème d'agence existant entre les apporteurs de fonds (actionnaires et créanciers) et le manager.[160]

Dans ce cadre, Jensen et Meckling (1976) ont développé une théorie de la structure de la propriété de l'entreprise en se basant sur l'aléa moral. Dans une entreprise où existe une séparation de la propriété du management, le manager (l'agent) n'agit pas toujours et nécessairement dans l'intérêt des actionnaires (principal). Il existe toujours la possibilité que le manager ne poursuive pas tout à fait l'objectif assigné par les actionnaires et qui est la maximisation de la valeur de la firme. Le manager peut en effet dévier de cet objectif et favoriser la réalisation de son objectif propre. Cette déviation est possible pour deux raisons, comme cela a été décrit plus haut : le conflit d'intérêt et l'asymétrie de l'information. Dans l'approche de Jensen et Meckling, la structure du capital est considérée comme une réponse des actionnaires au problème causé par la possible déviation du manager de l'objectif.

Le point de départ de l'analyse est que l'existence du problème d'agence va provoquer l'apparition de coûts, qualifiés de coûts d'agence. Dans ce cadre, la structure du capital peut être un outil permettent de minimiser les coûts d'agence. Jensen et Meckling ont identifié trois types de coûts d'agence :

- **Les coûts de monitoring** du principal (coût du contrôle). Ce sont les coûts des procédures ou mécanismes destinées à limiter le comportement du manager
- **Les coûts d'engagement** (bonding costs) : Ce sont les coûts que dépensent l'agent pour montrer sa bonne foi et sa loyauté

[159] F. Modigliani and M. Miller. "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment". *The American Economic Review*. Volume XLVIII, June 1958. Pages 261-297 et F. Modigliani and M. Miller. "Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: a Correction. The *American Economic Review.* 53, page 433-443.

[160] Plusieurs autres facteurs ont été proposés pour le développement d'une théorie de la structure du capital, tels que l'existence de coûts de la faillite (Scott, 1976) et le signal (Ross 1977).

– **Les pertes résiduelles** : Malgré l'existence du contrôle et de l'engagement, l'asymétrie de l'information ne sera pas complètement éliminée. Il existera donc toujours une divergence entre les décisions de l'agent et les décisions maximisant le bien-être du principal

Les coûts d'agence sont la somme de ces trois types de coûts d'agence. Jensen et Meckling ont montré que ces coûts d'agence peuvent être engendrés soit par les actions soit par la dette.

9.5.1. Les coûts d'agence des actions externes

Quel est l'impact des actions externes sur les coûts d'agence? Pour développer leur théorie de la structure du capital et de la structure de la propriété, Jensen et Meckling montrent que les coûts d'agence sont supportés par les actionnaires informés (insiders). Pour montrer cela, on considère dans un premier temps une firme possédée à 100% par le manager. On supposera par la suite que ce propriétaire / manager cède une partie de ses actions à des actionnaires externes et l'analyse s'attachera à déterminer l'impact de l'existence d'actions externes sur les coûts d'agence.

Pour formaliser l'existence de l'aléa moral, Jensen et Meckling considère que l'utilité du manager / propriétaire a une double origine : En premier lieu, et de façon très classique, elle augmente avec le profit qu'il peut obtenir de la firme. En second lieu, son utilité augmente avec les consommations non pécuniaires qu'il peut être amené à effectuer. Le manager/propriétaire fait cependant face à un arbitrage entre ces deux éléments car en augmentant la consommation des avantages non pécuniaires au-delà d'un certain niveau optimal, la rentabilité de la firme diminue. La combinaison optimale entre le rendement financier et les avantages non pécuniaires est obtenue lorsqu'il y'a égalisation de l'utilité marginale de chaque avantage non pécuniaire et l'utilité marginale d'une unité monétaire de pouvoir d'achat.

Les avantages non pécuniaires sont toutes dépenses que le manager / propriétaire est appelé à effectuer et pour lesquelles il obtient une utilité personnelle. L'exemple classique est le salaire que le manager / propriétaire se fixe en contrepartie de son travail.[161] Ce sont également la somptuosité du bureau, les déplacements vers des hôtels luxueux, le recrutement au sein de la firme, d'amis ou de membres de la famille. C'est également l'attribution de contrats avantageux à des amis ou à des membres de sa famille. Ces dépenses portent sur des biens qui sont à la fois des facteurs de production pour l'entreprise et des biens de consommation pour le manager.

Pour modéliser l'existence de ces avantages comme source d'aléa moral, symbolisons par :

$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ le vecteur des quantités de facteurs et d'activités de la firme à partir desquels le manager / propriétaire obtient une utilité (marginale) positive.
$C(X)$ le coût d'obtention de X

[161] Le versement d'un salaire est évidemment un avantage pécuniaire. Il est dans le cadre de cette analyse inclus dans les avantages non pécuniaires car, comme ces derniers, il procure au manager / propriétaire une utilité personnelle qui peut l'amener à s'octroyer un niveau de salaire supérieur au salaire qui aurait été accordé à un manager non propriétaire.

$P(X)$ le revenu total pour la firme en fonction de *X*.

On a donc :

$B(X) = P(X) - C(X)$: Bénéfice net pour la firme en fonction de *X*.

Soit X^* le niveau optimal de *X*. Il est donc donné par la relation suivante :

$$\frac{\partial B(X^*)}{\partial X^*} = \frac{\partial P(X^*)}{\partial X^*} - \frac{\partial C(X^*)}{\partial X^*} = 0$$

Si le niveau de *X* choisi par la firme est supérieur au niveau optimal X^*, alors $F = B(X^*) - B(X)$ mesure le coût pour la firme de l'incrément $X - X^*$, incrément procurant un surcroît d'utilité pour le manager.[162] Donc *F* est la valeur de marché des dépenses non pécuniaires du manager choisies au-delà du niveau optimal. De ce fait, l'arbitrage entre le rendement financier et les avantages non pécuniaires revient en un arbitrage entre la valeur *V* de la firme et le coût *F* de ces avantages non pécuniaires.

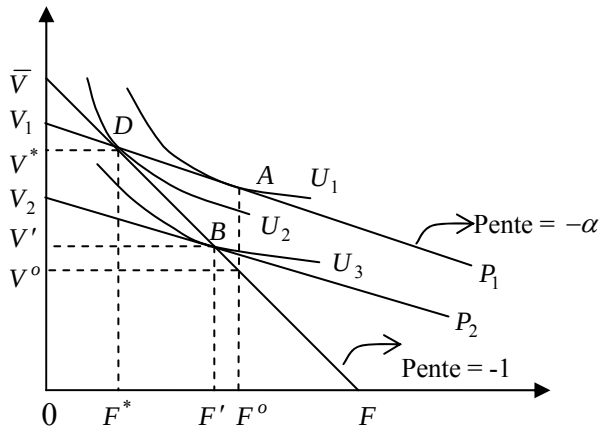


Figure 9.5

La figure 9.5 fait ressortir l'arbitrage auquel fait face le manager / propriétaire entre la valeur de marché *V* de la firme et la valeur *F* des avantages non pécuniaires. Elle montre que si le manager / propriétaire augmente sa consommation d'avantages non pécuniaires de 1 unité monétaire, la valeur de l'entreprise diminue de 1 unité monétaire, d'où la pente de – 1 pour $\overline{V}F$. La droite $\overline{V}F$ de pente égale à –1 est analogue à une contrainte budgétaire et représente le lieu géométrique des meilleure combinaisons possibles entre valeur de la firme et consommation d'avantages non pécuniaires.

$\overline{V}$ est la valeur maximale de l'entreprise. Elle est obtenue lorsque le manager choisit le niveau X^* d'avantages non pécuniaires, soit lorsque $F = 0$. La situation où le manager / propriétaire possède 100% de la firme est représentée par le point *D* où la valeur de la firme est V^* et la

[162] Notons que la firme s'éloigne de l'optimum dès lors qu'au moins un des éléments de *X* diffère de son niveau optimal.

valeur des avantages non pécuniaires consommés est F^*. Le point *D* est le point de tangence entre la courbe d'indifférence U_2 et la droite $\overline{V}F$.[163]

Si le manager / propriétaire vend 100% des actions de la firme tout en restant manager et si le nouveau propriétaire pouvait, sans coût, imposer au manager le même niveau de consommation F^*, alors le nouveau propriétaire sera prêt à payer le montant V^* pour acquérir 100% de la firme.

Supposons que le manager / propriétaire vende la fraction $(1-\alpha)$ de la firme et conserve la fraction α de la firme. Si l'acheteur anticipe que le manager / propriétaire maintiendra le même niveau de F^* de consommations d'avantages non pécuniaires, alors il sera disposé à payer le montant $(1-\alpha)V^*$ pour l'acquisition de la fraction $(1-\alpha)$ de la firme.

Mais lorsque le manager / propriétaire ne possède plus que la proportion α de la firme, s'il augmente sa consommation d'avantages non pécuniaires de 1 unité monétaire, il ne supporte plus que la proportion α de la baisse de la valeur de marché de la firme. La pente représentative de l'arbitrage (trade-off) du manager / propriétaire devient égale à $-\alpha$, comme par exemple pour la droite V_1F_1. Cette dernière passe par le point *D* car à cette étape de l'analyse, l'acheteur anticipe que le manager / propriétaire maintiendra le niveau F^* et donc est disposé à payer la somme $(1-\alpha)V^*$. Mais face à ces croyances, la meilleure réponse du manager / propriétaire n'est pas de maintenir le niveau F^* car il n'en supporte le coût que dans la limite de α.

Lorsque le manager / propriétaire ne possède que la proportion α de la firme, sa contrainte budgétaire *subjective* est V_1P_1. De ce fait, il sera incité à choisir le point *A*, qui est le point de tangence entre V_1P_1 et une courbe d'indifférence U_1 plus élevée. Le point *A* est l'expression de la meilleure réponse du manager / propriétaire au fait que le nouveau propriétaire paie le montant $(1-\alpha)V^*$.

Au point *A*, la valeur de la consommation d'avantages non pécuniaires augmente de F^* à F^O. Par conséquent, la valeur de marché de la firme diminue de V^* à V^O.

De ce fait, si le marché anticipe correctement la réaction du manager / propriétaire, alors le nouveau propriétaire n'acceptera pas de payer le montant $(1-\alpha)V^*$. En tenant compte de cette anticipation rationnelle, pour l'acquisition de la part $(1-\alpha)$ de la firme, le nouveau propriétaire ne paiera que $(1-\alpha)$ la valeur anticipée de la firme tenant compte du changement dans le comportement du manager / propriétaire.

Pour montrer comment se détermine le prix de marché après la vente de la proportion $(1-\alpha)$ des actions et comment apparaissent les coûts d'agence, soit *w* la richesse du manager / propriétaire après avoir vendu la fraction $(1-\alpha)$ de la firme. On a ainsi :

---

[163] Ici, l'équilibre est intérieur, mais il peut correspondre aux extrêmes $V=0$ ou $F=0$ avec des courbes d'indifférence appropriées.

$$w = S_o + S_i = S_o + \alpha V(F, \alpha)$$

S_o est le paiement effectué par les outsiders en contrepartie de la fraction $(1-\alpha)$ de la firme et S_i est la valeur de marché des actions (partie α) restant en possession du manager / propriétaire. $V(F,\alpha)$ est la valeur de marché de l'entreprise étant donné que le manager / propriétaire ne possède que la fraction α de la firme et que la valeur des avantages non pécuniaires consommés est *F*.

La droite V_2P_2 de la figure 9.5 représente l'arbitrage (trade-off) du manager / propriétaire entre la valeur de marché de la firme et la consommation d'avantages non pécuniaires. La pente de cette droite est $-\alpha$. Au point *B*, la droite V_2P_2 est tangente à la courbe d'indifférence U_3. C'est le choix optimal du manager / propriétaire. Ce point de tangence représente la solution de la contrainte d'incitation de l'agent (le propriétaire/manager).

Le prix de marché de la fraction $(1-\alpha)$ de la firme qui soit satisfaisant au vendeur et à l'acheteur est tel que ce point de tangence *B* se situe sur la droite $\overline{V}F$. Pour montrer cela, supposons le contraire. Considérons en premier lieu que le point de tangence se situe à gauche du point *B*. Comme la pente de V_2P_2 est négative, cela signifie un plus faible niveau de consommation d'avantages non pécuniaires et donc une plus grande valeur de marché de l'entreprise.

Comme le montre la figure 9.6.a, en acceptant S_o, le manager / propriétaire perçoit un montant plus faible que le prix de marché, ce qui lui est défavorable.

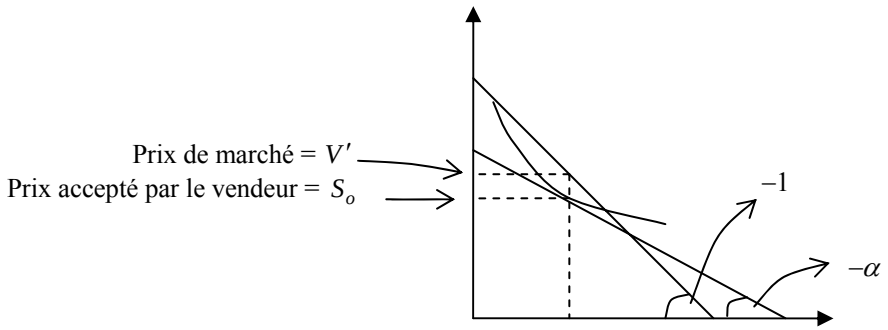


Figure 9.6.a

La figure 9.6.b montre le cas où le point de tangence se situe à droite du point *B*. Ce cas correspond à une plus grande consommation d'avantages non pécuniaires et donc une plus faible valeur de marché de l'entreprise. En acceptant S_o, l'acheteur paie un prix plus élevé que la valeur de marché, ce qui lui est défavorable.

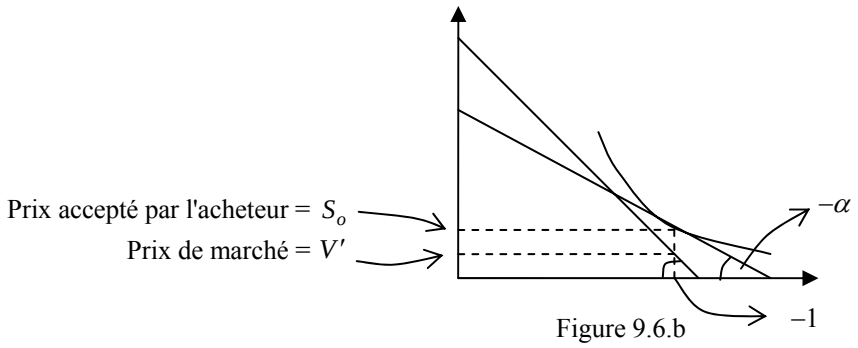


Figure 9.6.b

Le seul prix mutuellement satisfaisant doit être tel que le point de tangence se situe sur la droite $\overline{VF}$. A ce point, on a $S_o = (1-\alpha)V'$. Ceci implique que la richesse du manager / propriétaire après la vente de la fraction $(1-\alpha)$ des actions est la valeur réduite V'. En effet, on a :

$$W = S_o + \alpha V(F,\alpha) = (1-\alpha)V' + \alpha V' = V'$$

De ce fait, la baisse de la valeur de la firme de V^* à V' après la vente de la fraction $(1-\alpha)$ est *supportée* par le manager / propriétaire. La réduction de la valeur de marché de la firme $V^* - V'$ est due à l'existence d'une relation d'agence. C'est la mesure de la perte résiduelle.

Dans cet exemple simplifié où on n'a pas encore introduit la possibilité du monitoring et de l'engagement, cette perte résiduelle représente le coût d'agence total. Pour le manager / propriétaire, la décision de vente de la fraction $(1-\alpha)$ de la firme intervient après comparaison entre les coûts d'agence (différence entre U_3 et U_1) et l'utilité procurée par la liquidité S_o.

L'appropriation personnelle des avantages non pécuniaires n'est pas la seule forme de coût induit par la réduction de la part du manager / propriétaire dans la firme. Le coût le plus significatif est certainement la réduction de l'incitation à l'effort car pour un effort donné, le revenu du manager/propriétaire diminue au fur et à mesure que la proportion α diminue. La réduction de l'effort a pour effet de réduire la valeur de la firme tout comme la consommation des avantages non pécuniaires. En considérant que l'aléa moral porte sur le niveau d'effort *e*, *F* est déterminée par la relation $F = B(e^*) - B(e)$ avec e^* désignant l'effort optimal du manager/propriétaire.

En résumé, si le manager / propriétaire vend une partie des actions de la firme, il ne supportera plus qu'une fraction (égale à sa part dans la firme) du coût des avantages non pécuniaires. Les actionnaires externes peuvent limiter la consommation par le manager de ce type d'avantages par un contrôle qui nécessite un coût du contrôle Si le marché anticipe (et en général il le fait) ce type de coût, ces derniers seront supportés par le manager / propriétaire. Le prix que les actionnaires externes sont prêts à payer va donc tenir compte du coût du monitoring et du coût de la divergence d'intérêt. Le manager / propriétaire acceptera de supporter ces coûts si l'utilité du pouvoir d'achat ainsi obtenu est suffisamment élevée pour compenser ces coûts. Ce mécanisme s'accentue au fur et à mesure que la part du manager / propriétaire diminuera dans la firme

9.5.2. Le rôle du monitoring et de l'engagement dans la réduction des coûts d'agence

On considère maintenant la possibilité d'existence d'une activité de monitoring (audit, contrôle interne, restrictions budgétaires, rémunérations incitatives) dont l'objectif est la réduction de la consommation d'avantages non pécuniaires. On suppose que le monitoring réduit la consommation d'avantages non pécuniaires à un taux décroissant, soit $\partial F/\partial M < 0$ et $\partial^2 F/\partial M^2 > 0$. La relation entre les dépenses de monitoring *M* et le coût *F* des avantages non pécuniaires est représentée par la figure 9.7 :

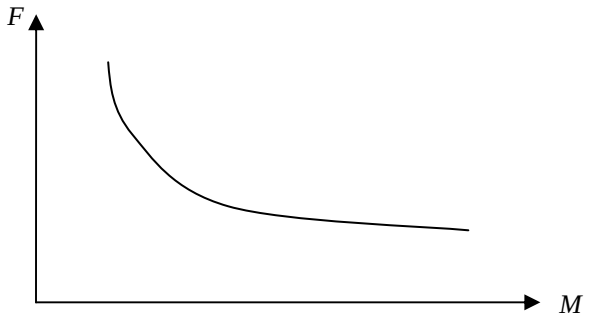


Figure 9.7

La figure 9.8 fait ressortir les effets de l'existence du monitoring. La courbe *BCE* est la contrainte budgétaire lorsqu'on tient en considération les coûts de monitoring *M*. Les points de la courbe BCE sont le résultat de l'équation $V = \overline{V} - F(M, \alpha) - M$. La différence verticale entre $\overline{V}F$ et BCE est le coût de monitoring M.

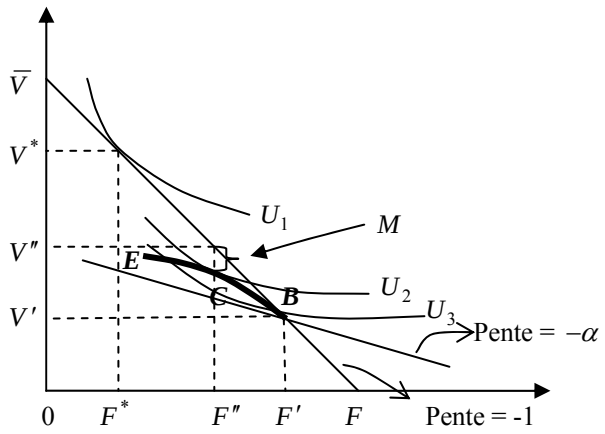


Figure 9.8

L'activité de monitoring réduit la consommation d'avantages non pécuniaires, ce qui a pour effet d'augmenter la valeur de l'entreprise de V' à V''.

En dépit de la réduction de la consommation d'avantages non pécuniaires de F' à F'', le manager / propriétaire voit son bien-être augmenter car la valeur de l'entreprise augmente de

V' à V''. Il est donc incité à accepter un contrat donnant aux investisseurs le droit de contrôler ses consommations d'avantages non pécuniaires.

On peut obtenir le même résultat en considérant cette fois que c'est le manager / propriétaire qui prend en charge le coût *M*. Dans ce cas, le coût *M* est le montant payé par le manager / propriétaire pour garantir aux actionnaires externes que la consommation d'avantages non pécuniaires sera limitée. Ce sont les coûts des actions par lesquelles le manager / propriétaire montre sa bonne foi et sa loyauté.

9.5.3. Les coûts d'agence de la dette

Le financement par la dette provoque également l'apparition d'un problème d'agence car la dette peut constituer pour le manager / propriétaire une incitation à choisir des activités qui génèrent de grands profits en cas de succès même si la probabilité de succès est faible. En effet, si le projet donne de bons résultats, c'est au bénéfice du manager / propriétaire. Par contre, s'il donne de mauvais résultats, c'est aux créanciers de supporter les coûts, au moins partiellement.

Le choix de projets risqués équivaut en fait, à un transfert de valeur des créanciers vers les actionnaires. Pour faire ressortir ce mécanisme de transfert, considérons l'exemple suivant qui illustre bien le conflit d'intérêt pouvant surgir entre les actionnaires et les créanciers. Supposons que l'entreprise (les actionnaires) dispose des deux projets d'investissement suivants d'une durée de vie égale à une année :

Tableau 9.3

Probabilité des états de la nature	Cash-flow Opérationnel	
	Projet 1	Projet 2
½	7.000	2.000
½	11.000	16.000

Ces deux projets sont donc tel que $E_1 = E_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$. Si le besoin de financement est de 7.000, l'entreprise présentera au créancier potentiel (par exemple la banque) uniquement le projet 1. Mais, étant donnée la responsabilité limitée, une fois le crédit obtenu, les actionnaires pourraient être incités *ex post* à dévier et à réaliser le projet 2, car leurs revenus nets, déduction faite de la dette sont :

Tableau 9.4

Probabilité des états de la nature	Cash-flow net	
	Projet 1	Projet 2
½	0	0
½	4.000	9.000

Pour les actionnaires, le projet 2 est préférable car quel que soit l'état de la nature, il leur procure un revenu net supérieur ou égal au revenu net du projet 1. La réalisation du projet 2 avec une dette destinée au projet 1 est en fait un transfert (*expropriation*) de richesse des

créanciers vers les actionnaires. Lorsqu'ils anticipent ce type de comportement des actionnaires (risque de hold-up), les créanciers peuvent prévoir des clauses de protection et de contrôle. Le coût de ce contrôle est un coût d'agence et est en dernier ressort à la charge des actionnaires. La nature de ces coûts est double : Des coûts directs (coût de l'information, de la procédure,…) et des coûts indirects (coût de l'intervention des créanciers dans la gestion).

9.5.4. Une théorie de la structure de la propriété basée sur les coûts d'agence

La théorie proposée par Jensen & Meckling n'est pas concernée uniquement par le ratio Fonds Propres / Dette. Elle a une portée plus générale et porte plutôt sur la structure de la propriété. Les trois variables concernées sont :

S_i : Actions internes (détenu par le manager / propriétaire)

S_o : Actions externes (les actionnaires externes à la firme)

B : Dette (les créanciers)

$V^* = S_i + S_o + B$: Valeur totale de la firme

Considérons dans un premier temps un taux de financement externe $K = \frac{B + S_o}{V^*}$ donné. La question porte alors sur le choix de la structure optimale entre les actions externes (actions détenus par des actionnaires non managers) et la dette. Etant donné que les coûts d'agence sont supportés par le manager / propriétaire, le choix de la structure optimale du financement externe est le choix du ratio $E = \frac{S_o}{B + S_o}$ qui minimise les coûts d'agence. La figure 9.9 permet de montrer comment est déterminée la structure optimale des fonds propres externes par rapport au financement externe.[164] Dans cette figure, on a, mesurés en unités monétaires :[165]

$A_{So}(E)$: Coûts d'agence des actions externes en fonction de E

$A_B(E)$: Coûts d'agence de la dette en fonction de E

$A_T(E) = A_{So}(E) + A_B(E)$: Coûts d'agence totaux en fonction de E.

[164] Rappelons que pour ce modèle, on fait l'hypothèse de marchés efficients de la dette et des actions. Les prix intègrent donc tous les coûts, notamment les coûts de monitoring et d'engagement. Rappelons également que les coûts d'agence sont supportés par le manager / propriétaire.

[165] Dans cette figure, le déplacement vers la droite signifie $+S_o$ et $-B$.

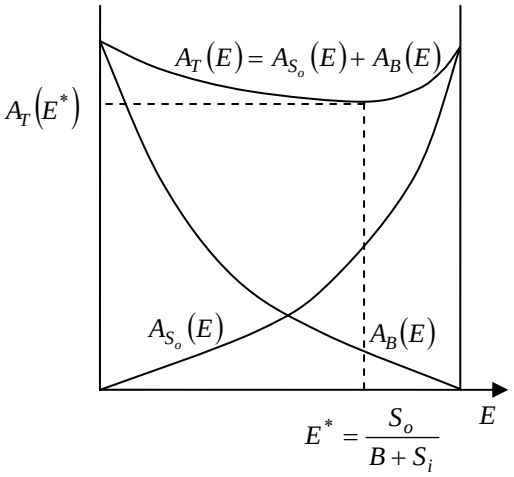


Figure 9.9.a

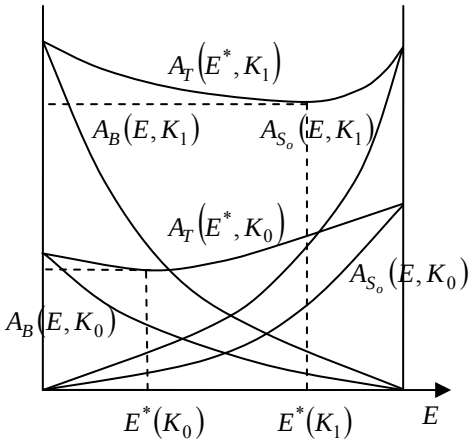


Figure 9.9.b

La figure 9.9.a montre que lorsque le ratio $E = \frac{S_o}{B + S_o}$ augmente, l'incitation du manager / propriétaire à augmenter les consommations non pécuniaires ou à fournir moins d'effort (augmenter *F*) est plus grande, d'où l'augmentation des coûts d'agence $A_{S_o}(E)$. Lorsque le montant de la dette diminue, l'incitation du manager à exproprier les créanciers devient plus faible, ce qui implique une diminution des coûts d'agence associés à la dette. Sans avoir présenté de justifications à la forme des courbes représentatives des coûts d'agence $A_{So}(E)$ et $A_B(E)$, Jensen & Meckling soutiennent que la courbe représentant les coûts d'agence totaux possède la forme générale indiquée dans la figure 9.9.a et 9.9.b, ce qui montre qu'il existe une structure optimale de la propriété des entreprises. Cette structure est celle qui minimise les coûts d'agence.

Pour faire ressortir l'effet du volume du financement externe, Jensen et Meckling considèrent deux niveaux différents de financement externe K_0 et K_1 avec $K_0 < K_1$. Un niveau $K = \frac{B + S_o}{V^*}$ élevé signifie que la firme recours à plus de financement d'origine externe et, par conséquence, à moins de financement interne. Lorsque la part des actions externes augmente, la part α du manager / propriétaire dans la firme diminue, ce qui crée une incitation plus forte à augmenter ses consommations non pécuniaires. L'activité de monitoring augmente en conséquence. Ainsi, au fur et à mesure que *K* augmente, les coûts d'agence augmentent, ce qui donne $A_{S_0}(E, K_1) > A_{S_0}(E, K_0)$, comme il ressort de la figure 9.9.b.

De même, comme le montant de la dette augmente, la part α du manager / propriétaire dans la firme diminue, ce qui crée une incitation plus forte à transférer le risque vers les créanciers. L'activité de monitoring des créanciers augmente en conséquence. Ainsi, au fur et à mesure que *K* augmente, ces coûts d'agence augmentent, ce qui donne $A_B(E, K_1) > A_B(E, K_0)$, comme il ressort également de la figure 9.9.b.

D'après ce schéma, on voit que les coûts d'agence totaux augmentent avec le recours accru aux financements d'origine externe (actions externes et dette).

Chapitre 10 : Les mécanismes d'enchères

La procédure des enchères est un mécanisme de vente de biens et de détermination des prix applicable lorsque le vendeur cherche à déterminer la *disposition à payer* des acheteurs potentiels afin de maximiser son revenu espéré et, par voie de conséquence, de minimiser la rente d'information des acheteurs potentiels. Ce mécanisme vise donc à organiser un marché ponctuel et spécifique et ce, par la rencontre du vendeur et des acheteurs potentiels. Les enchères peuvent également donner lieu à la rencontre entre un acheteur et plusieurs vendeurs. C'est le cas par exemple, de l'attribution par l'administration d'un contrat de fourniture ou de gestion d'un monopole naturel. On parle dans ce cas d'appel d'offres ou d'adjudication.

Dans les économies modernes, les enchères sont utilisées dans plusieurs domaines, notamment pour l'attribution de marchés publics, de concessions minières ou d'exploitation de champs pétroliers, l'émission de bons du Trésor, la vente de devises, la vente d'objets d'art, … La cotation en bourse des actions est un mécanisme de double enchères.

10.1. Les différentes formes d'enchères

Il existe plusieurs formes d'enchères, notamment : l'enchère anglaise, l'enchère hollandaise, l'enchère sous pli fermé au premier (plus haut) prix et l'enchère sous pli fermé au second prix. Dans l'enchère au premier prix, le vainqueur paie le prix qu'il a proposé et dans l'enchère au second prix, il paie le deuxième prix le plus élevé (le plus haut prix rejeté). Il existe deux principales formes de transmission des offres : la forme orale et la forme écrite. La forme orale est associée à l'enchère anglaise (enchère ascendante) et à l'enchère hollandaise (enchère descendante). La forme écrite est associée à l'appel d'offres et à l'adjudication, car le prix (l'offre) est transmis sous pli fermé (cacheté). Lorsque la vente porte sur un bien homogène divisible, plusieurs vainqueurs peuvent exister. C'est le cas par exemple de la vente aux enchères des bons du Trésor. La règle de paiement peut être discriminante, en ce sens que chaque soumissionnaire retenu paie le prix qu'il a proposé.[166]

Dans l'enchère anglaise, les offres sont faites de façon séquentielle et convergent vers le prix d'équilibre. Le commissaire-priseur commence les enchères en annonçant un prix faible, éventuellement égal à la valeur de réserve du vendeur. Les acheteurs surenchérissent jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul acheteur. Dans l'enchère hollandaise, le commissaire-priseur fixe un prix élevé et commence à le diminuer progressivement. Le bien est attribué à l'acheteur qui manifeste le premier son intention d'acquérir le bien.

L'appel d'offre est une procédure de mise en concurrence souvent utilisée par l'administration pour l'attribution de contrats de fourniture ou de travaux. Le choix du bénéficiaire se fait selon plusieurs critères tels que le prix offert, la qualité du bien ou service, les garanties et les délais et dépend donc, entre autres, de la pondération attribuée par l'acheteur à chacun de ces critères. La procédure de l'adjudication est plus stricte, car le prix est le seul critère

[166] Pour une description plus détaillée des enchères, voir par exemple Florence Naegelen. Les mécanismes d'enchères. *Economica*, 1988.

d'attribution du bien ou du contrat. Elle suppose que les caractéristiques du bien ou du service concerné sont précisément définies, ce qui représente une difficulté importante en pratique.

10.2. Les enchères, jeu non coopératif à information incomplète

Du point de vue théorique, l'étude de la vente aux enchères s'est intensifiée à partir des années 60 après en particulier la publication de l'article pionnier de Vickrey (1961).[167] L'étude théorique des enchères nécessite de faire appel à la théorie de l'utilité en cas d'incertitude (Von Neumann-Morgenstein) et à la notion d'équilibre bayésien de la théorie des jeux (Harsanyi). L'analyse des enchères a donné lieu à une multitude de développements théoriques à l'effet de tenir compte de leur grande diversité.[168]

On peut subdiviser la théorie des enchères en deux principales parties : les enchères à valeurs privées indépendantes et les enchères à valeur commune. Dans la première catégorie, l'hypothèse adoptée est que chaque acheteur potentiel attribue à l'objet une valeur subjective qui lui est propre. Cette valeur, qui est donc sa disposition à payer, est privée et indépendante de celle des autres acheteurs potentiels. Dans les enchères à valeur commune, le bien mis en vente a une valeur unique commune mais inconnue des acheteurs. Chacun d'eux dispose d'une information (signal) sur cette valeur, indépendamment des autres acheteurs. Milgrom et Weber (1982) ont montré que ces deux modèles peuvent être considérés comme des cas particuliers d'un modèle plus général, celui des valeurs affiliées.[169]

L'étude théorique des enchères a évolué selon deux principales étapes. La première étape a porté sur l'étude des caractéristiques et propriétés des mécanismes d'enchères courants (enchère anglaise, enchère hollandaise, enchère sous pli fermé au plus haut prix, enchère sous pli fermé au second prix). La deuxième étape (début des années 80) s'est attachée à la détermination d'enchères optimales du point de vue du vendeur. Le résultat général de cette seconde étape est que sous certaines conditions, les mécanismes d'enchères courants sont optimaux en ce sens qu'ils procurent au vendeur une espérance de revenu maximum.

L'asymétrie de l'information relative à la valeur du bien attribuée par chacun des joueurs est une caractéristique centrale des enchères. Le vendeur ne connaît pas la valeur attribuée au bien par chacun des acheteurs. De même, un acheteur donnée ne connaît pas la valeur attribuée au bien par les autres acheteurs. Dans le cadre des mécanismes d'enchères, les acheteurs et le vendeur évoluent donc dans un environnement à information incomplète. Chaque enchérisseur ignore les caractéristiques des autres enchérisseurs, à savoir : la fonction de préférence ou d'utilité (goût, attitude vis-à-vis du risque) et en particulier l'évaluation subjective du bien mis en vente.

Les mécanismes d'enchères créent une situation de conflits d'intérêts d'une part entre les acheteurs et d'autre part entre les acheteurs et le vendeur. L'acquisition du bien par un

---

[167] W. Vichrey. Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders. *The Journal of Finance*. Vol. 16, March 1961. P 8-37.

[168] Il faut remarquer que le tâtonnement Walrasien utilisait déjà le mécanisme d'enchères pour la détermination du prix d'équilibre dans un marché concurrentiel. Dans ce modèle, le commissaire priseur est l'agent fictif chargé, sans coût, de recueillir les offres et les demandes et de déterminer les prix et les quantités d'équilibre.

[169] Paul Milgrom et Robert Weber. A theory of auctions and competitive bidding. *Econometrica*, Vol. 50, September 1982. P 1088-1122.

acheteur donné exclue celle des autres enchérisseurs. Chaque acheteur adopte une stratégie d'enchères avec comme objectif de maximiser son espérance d'utilité et le résultat final est le produit de l'interaction des stratégies des acheteurs. En raison de l'interaction de stratégies conflictuelles des participants et de l'incomplétude de l'information, les mécanismes d'enchères sont typiquement un thème de la théorie des jeux non coopératifs en information incomplète.

Le problème de l'incomplétude de l'information réside en ce qu'il peut donner lieu à une suite infinie d'anticipations de la part des acheteurs. En effet, l'enchère d'un acheteur donné dépend non seulement de sa valeur subjective du bien, mais également de l'anticipation qu'il a sur la valeur subjective des autres acheteurs. Il doit, de plus, faire des anticipations sur les anticipations des autres acheteurs, et ainsi de suite. La solution à ces anticipations à l'infini a été proposée par Harsanyi (1967) à travers l'introduction d'un agent fictif, la Nature, qui joue en premier, et ce en affectant à chaque enchérisseur une évaluation subjective de l'objet mis en vente. Le concept d'équilibre à utiliser dans ce cas est l'équilibre de Nash bayésien.

10.3. L'espérance de revenu dans le modèle à valeurs privées indépendantes

Un des résultats importants de la théorie des enchères à *valeurs privées indépendantes* est que l'espérance de revenu $E(R)$ du vendeur est identique pour une large étendue d'enchères, notamment pour les quatre formes d'enchères courantes, à savoir l'enchère anglaise, l'enchère hollandaise, l'enchère sous pli cacheté au plus haut prix et l'enchère sous pli cacheté au second prix. Ce revenu espéré dépend du nombre *n* d'acheteurs potentiels, de la distribution de probabilité des valeurs subjectives v_i attribuées par les acheteurs potentiels au bien mis en vente et de la valeur subjective v_* au-dessous de laquelle les acheteurs potentiels ne trouvent pas intéressant d'enchérir. Ce résultat a été mis en avant en premier par Vickrey (1961) et a été par la suite confirmé par Myerson (1981) et par Riley et Samuelson (1981).[170]

La littérature traitant du modèle de valeurs privées indépendantes dans le cas de la vente d'un bien unique se base sur les hypothèses fondamentales suivantes :

i) Le vendeur a une valeur de réservation égale à v_0. C'est le prix au-dessous duquel il n'acceptera pas de vendre le bien.

ii) Le choix des règles d'enchère revient généralement au vendeur qui a ainsi pour objectif d'exploiter sa position monopolistique.

iii) Il existe *n* enchérisseurs potentiels et la disposition à payer de chaque enchérisseur est $v_i \in [\underline{v}, \overline{v}]$ et n'est connue que de lui-même. C'est son information privée.

[170] Myerson R. B. (1981). « Optimal Auction Design ». *Mathematics of Operations Research.* Vol. 6, N° 1, 1981. P 58-73.
John Riley & William Samuelson. Optimal Auctions. *The American Economic Review*. Vol. 71, n° 3. June 1981. P 381-392.

iv) Chaque acheteur *i* considère la disposition à payer des autres acheteurs comme un tirage aléatoire indépendant à partir d'une distribution de probabilité. Cette dernière, la même pour tous les enchérisseurs, est une information commune à tous les joueurs (le vendeur et les *n* acheteurs potentiels). Ceci est l'hypothèse IID.[171]

La figure 10.1 représente la fonction de répartition $F(v)$ de la valeur de réservation de l'acheteur potentiel. La fonction de répartition $F(v)$ est donc telle que $F(\underline{v})=0$, $F(\overline{v})=1$. Elle est différentiable sur tout l'intervalle $[\underline{v}, \overline{v}]$, avec $F'(v)= f(v)>0$.

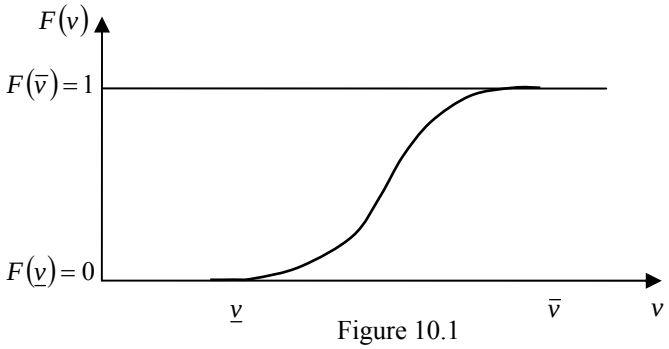


Figure 10.1

Dans ce chapitre, nous nous basons sur la contribution importante de Riley et Samuelson (1981) pour dériver l'expression de l'espérance de paiement du vendeur dans le cadre des enchères appartenant à la famille *E* d'enchères caractérisées par les propriétés suivantes :[172]

- Tout acheteur potentiel peut faire une offre supérieure au prix de réserve b_0 annoncé par le vendeur.[173]
- Le bien est attribué à l'acheteur ayant proposé la plus grande enchère.
- Les règles de l'enchère sont anonymes et donc aucun acheteur ne bénéficie d'un traitement préférentiel.
- Il existe une stratégie d'équilibre commune $b(\cdot)$, fonction strictement croissante des évaluations v_i, c'est-à-dire $b'(v_i)>0$.

Riley et Samuelson (1981) ont obtenu les principaux résultats :

- Lorsque le vendeur et l'ensemble des *n* acheteurs potentiels sont neutres au risque, le revenu espéré du vendeur est le même pour toutes les formes d'enchères appartenant à la famille *E* définie plus haut. En particulier, comme les quatre formes d'enchères décrites plus haut, à savoir l'enchère anglaise, l'enchère hollandaise, l'enchère au premier prix sous pli cacheté et l'enchère au second prix sous pli cacheté font partie de la famille *E*, elles procurent au vendeur la même espérance de revenu.

- Les acheteurs potentiels proposent une enchère inférieure à leur disposition à payer, c'est-à-dire $b(v_i)<v_i$.

[171] IID : Independent and Identical Distributions
[172] Riley J et Samuelson W. 1981. P 382. Myerson (1981) est parvenu au même résultat en adoptant une démarche différente.
[173] b_0 est le prix de réserve annoncé par le vendeur, tandis que v_0 est son prix de réserve subjectif, non observable par les enchérisseurs.

- Le prix de réserve annoncé b_0 par le vendeur est supérieur à sa valeur subjective, soit $b_0 > v_0$.

- Lorsque les enchérisseurs ont de l'aversion pour le risque, le revenu espéré du vendeur est plus élevé avec l'enchère sous pli fermé au premier prix par rapport à l'enchère sous pli fermé au second prix.

Le revenu du vendeur est le paiement effectué par l'acheteur qui remporte l'enchère. En conséquence, pour déterminer le revenu espéré du vendeur, il faut déterminer le paiement espéré de l'acheteur ayant remporté l'enchère. Cette démarche implique donc l'analyse de la stratégie d'enchère des acheteurs. En participant aux enchères, un acheteur potentiel obtient une utilité espérée (gain espéré) égale à :

$$\begin{Bmatrix}\text{Gain espéré}\\ \text{de l'acheteur}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\text{Valeur de}\\ \text{réservation}\end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix}\text{Probabilité}\\ \text{de gagner}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\text{Espérance}\\ \text{de paiement}\end{Bmatrix}$$

L'objectif de l'analyse est de faire ressortir les conditions sous lesquelles le profil de stratégies $(b(v_1), b(v_2), \cdots, b(v_n))$ constitue un équilibre de Nash bayésien. Il faudra par la suite déduire les implications de ce résultat.

Sans perte de généralité, considérons le cas de l'acheteur potentiel 1. Il faut donc montrer que si les $(n-1)$ autres enchérisseurs adoptent la stratégie d'enchère $b(v_i)$, alors la meilleure réponse du joueur 1 est d'avoir la stratégie $b(v_1)$. Pour montrer cela, considérons la déviation du joueur 1 vers la stratégie $b(x)$, sachant que son évaluation pour l'objet est v_1. Il faudra alors faire ressortir sous quelles conditions le joueur 1 n'est pas incité à dévier vers $b(x)$ ce qui donnera $x = v_1$ comme meilleure réponse du joueur 1 aux choix $b(v_2), \cdots, b(v_n)$ des autres enchérisseurs. En cas de déviation, l'espérance de gain de l'acheteur potentiel 1 sera donc :

$$\pi(x, v_1) = v_1 \cdot (F(x))^{n-1} - P(x) \qquad (10.1$$

Avec :

$\pi(x, v_1)$: Le gain espéré de l'enchérisseur 1 ayant la disposition à payer v_1 et basant sa stratégie sur une disposition à payer égale à *x*.

v_1 : L'évaluation subjective de l'objet attribuée par l'acheteur potentiel *i*. C'est sa disposition à payer et est comprise entre $\underline{v}$ et $\overline{v}$, ce qui donne $v_1 \in [\underline{v}, \overline{v}]$.

$(F(x))^{n-1}$: La probabilité que l'enchérisseur 1 soumette une enchère $b(x)$ qui soit l'offre la plus élevée et remporte ainsi l'enchère.

$P(x)$: L'espérance de paiement de l'enchérisseur 1 sachant que sa stratégie d'enchère est $b(x)$.

La probabilité que l'acheteur 1 gagne l'enchère est la probabilité qu'il soumette l'enchère la plus élevée par rapport à chacun des $(n-1)$ autres acheteurs. Cette probabilité est donc :

$$\Pr ob\,(b_i < b_1) \text{ pour tout } i \neq 1$$

Dans le modèle à valeurs privées, les dispositions à payer des différents acheteurs potentiels sont indépendantes. De ce fait, cette probabilité est égale au produit suivant :

$$\Pr ob\,(b_2 < b_1) \times \cdots \times \Pr ob\,(b_n < b_1)$$

$$= \prod_{i \neq 1} \Pr ob\,(b_i < b_1) = \prod_{i \neq 1} \Pr ob\,(b(v_i) < b(x)) = \prod_{i \neq 1} \Pr ob\,(v_i < x)$$

$$= [F(x)]^{n-1}$$

Soit p le paiement à effectuer par l'enchérisseur 1. Le paiement p est fonction non seulement de l'enchère b_1 de l'acheteur 1, mais également de toutes les autres enchères, ce qui donne :

$$p = p(b_1, b_2, \cdots, b_n) = p(b(x), b(v_2), \cdots, b(v_n))$$

Cette expression est celle du paiement p de l'enchérisseur 1 lorsqu'il base son enchère sur une valeur subjective x tandis que les autres enchérisseurs 2, …, n basent leur enchère sur leur valeur subjective $v_2, ..., v_n$. Par exemple, dans l'enchère au premier prix, le prix à payer est égal à l'enchère du gagnant, tandis que dans l'enchère au second prix, le prix à payer est la deuxième meilleure enchère. L'espérance de paiement $P(x)$ de l'acheteur 1 est donc :

$$P(x) = \underset{v_2, \ldots, v_n}{E} \left(p(b(x), b(v_2), \cdots, b(v_n)) \right)$$

L'objectif de l'acheteur 1 est de choisir x de telle sorte à maximiser son gain espéré. Le programme de l'enchérisseur 1 est donc :

$$\underset{x}{\text{Max}}\ \pi(x, v_1) = v_1 \cdot (F(x))^{n-1} - P(x)$$

Pour que le profil de stratégies $(b(v_1), b(v_2), \cdots, b(v_n))$ soit un équilibre de Nash bayésien, il faut que la stratégie $b(v_1)$ de l'acheteur potentiel 1 soit sa meilleure réponse lorsque les autres $(n-1)$ enchérisseurs choisissent les stratégies $b(v_2), \cdots, b(v_n)$. La condition du premier ordre du programme de maximisation de l'acheteur potentiel 1 doit donc être tel que :

$$\frac{\partial \pi(x, v_1)}{\partial x} = v_1 \frac{d\,(F(x))^{n-1}}{d\,x} - P'(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = v_1$$

Comme on a $F'(x) > 0$, cette condition du premier ordre est bien celle d'un maximum.[174] En remplaçant x par v_1, on obtient la condition d'optimalité suivante :

$$v_1 \frac{d\,(F(v_1))^{n-1}}{d\,v_1} - P'(v_1) = 0 \tag{10.2}$$

La condition d'optimalité (10.2) est vraie pour toute valeur de réserve excédant v_*, cette dernière étant la valeur de réservation pour laquelle un acheteur est indifférent entre enchérir $b(v_*)$ et ne pas participer à l'enchère.[175] En d'autres termes, un acheteur potentiel ayant une disposition à payer inférieure à v_* ne sera pas incité à participer à l'enchère. La condition d'optimalité est donc vraie pour tout $v_1 \geq v_*$, avec v_* satisfaisant l'équation (10.3) :

$$\pi(v_*, v_*) = v_* \cdot (F(v_*))^{n-1} - P(v_*) = 0 \tag{10.3}$$

La condition d'optimalité est donc telle que :

$$P'(v_1) = v_1 \frac{d\,(F(v_1))^{n-1}}{d\,v_1} \quad \text{pour} \quad v_1 \geq v_*$$

En intégrant cette dernière expression sur l'intervalle $[v_*, v_1]$, on obtient :[176]

$$\int_{v_*}^{v_1} P'(x)dx = \int_{v_*}^{v_1} x \frac{d\,(F(x))^{n-1}}{d\,x} dx$$

$$\int_{v_*}^{v_1} P'(x)dx = \int_{v_*}^{v_1} x\, d\,(F(x))^{n-1}$$

En utilisant la condition aux limites (équation 10.3), le premier terme de cette égalité s'écrit comme suit :

$$\int_{v_*}^{v_1} P'(x)dx = P(x)\Big|_{v_*}^{v_1} = P(v_1) - P(v_*) = P(v_1) - v_*(F(v_*))^{n-1}$$

La résolution du second terme, après intégration par parties, donne :[177]

$$\int_{v_*}^{v_1} x\, d(F(x))^{n-1} = v_1(F(v_1))^{n-1} - v_*(F(v_*))^{n-1} - \int_{v_*}^{v_1} (F(x))^{n-1} dx$$

---

[174] En annexe à ce chapitre, on montre que cette condition du premier ordre est bien celle d'un maximum.

[175] Remarquons que v_* peut être égale à $\underline{v}$

[176] On a $d\left(F(x)^{n-1}\right)/dx = \left(F(x)^{n-1}\right)'$ et donc $\left(d\left(F(x)^{n-1}\right)/dx\right)dx = \left(F(x)^{n-1}\right)' dx = d\left(F(x)^{n-1}\right)$.

[177] Voir annexe.

On a donc $P(v_1) - v_*(F(v_*))^{n-1} = v_1(F(v_1))^{n-1} - v_*(F(v_*))^{n-1} - \int_{v_*}^{v_1} (F(x))^{n-1} dx$, soit :

$$P(v_1) = v_1(F(v_1))^{n-1} - \int_{v_*}^{v_1} (F(x))^{n-1} dx \quad \text{pour} \quad v_1 \geq v_*$$

L'étape suivante est de considérer le point de vue du vendeur. Pour ce dernier, $P(v_1)$ est une variable aléatoire car il ne peut observer la valeur v_1. Le vendeur connaît la distribution $F(v_1)$. L'espérance de revenu du vendeur en provenance de l'acheteur 1 est donc :

$$\overline{P_1} = \int_{v_*}^{\bar{v}} P(v_1) F'(v_1) dv_1$$

En substituant $P(v_1)$, on obtient :

$$\overline{P_1} = \int_{v_*}^{\bar{v}} \left(v_1(F(v_1))^{n-1} - \int_{v_*}^{v_1} (F(x))^{n-1} dx \right) F'(v_1) dv_1$$

Après une seconde intégration par parties, on obtient :[178]

$$\overline{P_1} = \int_{v_*}^{\bar{v}} (v_1 F'(v_1) + F(v_1) - 1)(F(v_1))^{n-1} dv_1$$

$\overline{P_1}$ est le revenu espéré du vendeur en provenance de l'acheteur potentiel 1. Etant donné le traitement identique des *n* acheteurs potentiels, le revenu espéré du vendeur est simplement égal à *n* fois $\overline{P_1}$, ce qui donne l'expression suivante de l'espérance de revenu du vendeur :

$$E(R) = n \int_{v_*}^{\bar{v}} (vf(v) + F(v) - 1)(F(v))^{n-1} dv \tag{10.4}$$

L'équation (10.4) est l'expression du théorème d'équivalence-revenu qui signifie que pour les mécanismes d'enchère appartenant à la famille *E* défini plus haut, le revenu espéré du vendeur est identique et est donné par cette équation. Donc, dans le cadre des hypothèses du modèle à valeurs privées indépendantes, les quatre mécanismes d'enchère décrits plus haut, soit l'enchère anglaise, l'enchère hollandaise, l'enchère sous pli fermé au premier prix et l'enchère sous pli fermé au second prix, procurent au vendeur la *même espérance de revenu*. De plus, cette espérance de revenu est fonction du nombre d'enchérisseurs *n*, de la distribution des valeurs privées *F*(*v*) et de la valeur v_*.

Cette proposition est d'une importance capitale car elle permet de comparer deux différentes enchères simplement en comparant la valeur de réserve minimale v_* au-dessous de laquelle il n'est pas intéressant d'entrer dans chacune des enchères. Ainsi, toutes les formes d'enchères aboutissant au même v_* donnent au vendeur le même revenu espéré. Considérons l'enchère au premier prix et l'enchère au second prix. Ces dernières répondent à toutes les propriétés de

[178] Voir annexe.

la famille *E*. Si le vendeur fixe un prix de réservation égale à b_0, alors pour ces deux enchères, on a $v_* = b_0$. Dans ce cas, ces deux enchères procurent au vendeur le même revenu espéré. On montre par ailleurs l'équivalence d'une part, entre l'enchère anglaise et l'enchère sous pli fermé au second prix (enchère de Vickrey) et d'autre part, entre l'enchère hollandaise et l'enchère sous pli fermé au premier (plus haut) prix. De ce fait, dans le cadre du modèle à valeurs privées indépendantes, l'équation (10.4) est vraie pour les quatre formes d'enchères qui font donc partie de la famille *E*.

10.4. La sous enchère des acheteurs potentiels

Pour montrer qu'à l'équilibre, les acheteurs potentiels soumettent des enchères inférieures à leur valeur subjective, prenons le cas de l'enchère sous pli cacheté au plus haut prix où le vendeur annonce un prix de réservation égal à b_0. Dans ce cas, ne sont incités à participer à l'enchère que les acheteurs potentiels tels que $v_i > b_0$ et on a donc $v_* = b_0$. Tout acheteur potentiel ayant un prix de réserve $v > b_0$ est donc incité à entrer dans l'enchère. Dans l'enchère sous pli fermé au plus haut prix, l'espérance de paiement d'un acheteur potentiel quelconque est :

$$P(v) = \Pr ob\ \{b(v) \text{ est l'offre la plus élevée}\} \times b(v)$$

Ce qui donne $P(v) = (F(v))^{n-1} \times b(v)$ et on a donc :

$$b(v) = \frac{P(v)}{(F(v))^{n-1}}$$

Nous avons vu plus haut que $P(v) = v(F(v))^{n-1} - \int_{v_*}^{v} (F(x))^{n-1} dx$ pour $v \geq v_*$. En substituant cette expression dans celle de $b(v)$ et en tenant compte d'un prix de réserve égal à b_0 annoncé par le vendeur, on obtient :

$$b(v) = \frac{P(v)}{(F(v))^{n-1}} = \frac{v(F(v))^{n-1} - \int_{b_0}^{v} (F(x))^{n-1} dx}{(F(v))^{n-1}} \quad \text{avec} \quad v \geq b_0$$

$$b(v) = v - \frac{\int_{b_0}^{v} (F(x))^{n-1} dx}{(F(v))^{n-1}} \quad \text{avec} \quad v \geq b_0$$

En d'autres termes, en présence de l'hypothèse IID et de la neutralité au risque des acheteurs potentiels avec un prix de réserve b_0 annoncé par le vendeur, dans un équilibre de Nash bayésien, la stratégie optimale des acheteurs potentiels consiste donc à faire une enchère

inférieure à leur disposition à payer, soit $b(v) < v$. Ceci est dû au fait que le vendeur maximise une espérance de revenu et est également la conséquence de l'arbitrage des enchérisseurs entre la probabilité de gagner l'enchère et le paiement net en cas de succès. Notons également que cette dernière expression montre que la stratégie d'enchère $b(v)$ est strictement croissante par rapport à la valeur subjective v, c'est-à-dire qu'on a $b'(v) > 0$, ce qui confirme la satisfaction de la quatrième propriété des enchères de la famille *E*.

10.5. La surestimation du prix de réserve du vendeur

Riley et Samuelson (1981) considèrent par la suite la question de la détermination du prix de réserve lorsque le vendeur maximise son rendement total espéré lequel est composé de deux parties :

- La première partie est constituée du revenu espéré du vendeur lorsque le bien est vendu.

- La seconde partie est constituée du « revenu » du vendeur lorsque le bien n'est pas vendu. Cette situation représente le cas où aucun des enchérisseurs ne soumet une offre supérieure à v_*. Elle survient avec une probabilité égale à $F(v_*)^n$ qui est la probabilité que pour tous les acheteurs potentiels, la valeur subjective v_i est inférieure à v_*. Dans ce cas, et avec une probabilité égale à $F(v_*)^n$, le vendeur gagne v_0, c'est-à-dire sa propre évaluation subjective de l'objet.

De ce fait, le rendement total espéré du vendeur est donné par :

$$v_0 F(v_*)^n + n\int_{v_*}^{\bar{v}} \left(vF'(v) + F(v) - 1\right)\left(F(v)\right)^{n-1} dv$$

En différenciant ce rendement total espéré par rapport à v_*, on trouve la valeur v_* qui maximise ce rendement total espéré. La condition du premier ordre à satisfaire est donc :[179]

$$n\left(v_0 F'(v_*) - v_* F'(v_*) - F(v_*) + 1\right)\left(F(v_*)\right)^{n-1} = 0$$

Ceci permet d'obtenir la proposition 3 de Riley et Samuelson selon laquelle les enchères de la famille *E* qui permettent de maximiser le rendement total espéré sont celles pour lesquelles :

$$v_* = v_0 + \frac{1 - F(v_*)}{F'(v_*)}$$

[179] Comme $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, on a $\frac{d}{da}\int_a^b f(x)dx = -F'(a) = -f(a)$.

Ainsi, dans les enchères sous pli fermé au premier prix et au second prix avec prix de réserve b_0 annoncé par le vendeur, on a $b_0 = v_*$. Dans ces enchères, le prix de réserve annoncé par le vendeur est donc surévalué par rapport à sa valeur subjective v_0, soit $b_0 > v_0$.

10.6. Le cas de l'aversion pour le risque

Tout en maintenant l'hypothèse de IID, considérons maintenant que les acheteurs potentiels ont de l'aversion pour le risque. Riley et Samuelson ont montré que cela implique les modifications suivantes des résultats précédents :[180]

- Dans l'enchère au second prix, les enchérisseurs continuent d'enchérir leur valeur de réservation. On a donc toujours $b_i^* = v_i$.
- Dans la procédure de l'enchère au plus haut prix, les acheteurs potentiels font des enchères supérieures à leur enchère en cas de neutralité au risque.
- En conséquence, en cas d'aversion pour le risque des acheteurs potentiels, le vendeur obtient un revenu espéré plus élevé dans l'enchère au plus haut prix par rapport à l'enchère au second prix.

En cas d'aversion pour le risque, les acheteurs potentiels font une enchère plus élevée que l'enchère en cas de neutralité vis-à-vis du risque, augmentant ainsi leur probabilité de succès. La raison de ce comportement est que dans le cas contraire, la probabilité de perdre l'enchère et donc le gain $(v_i - b_i)$ est plus élevée et, en raison de la concavité de la fonction d'utilité, a une pondération plus forte que celle du gain pouvant résulter d'une enchère moins élevée.

10.7. L'espérance de revenu du vendeur avec des évaluations subjectives uniformes

Pour une meilleure intuition de l'expression du revenu espéré du vendeur, supposons à la suite de Vickrey (1961) que les valeurs subjectives des acheteurs sont des tirages aléatoires d'une distribution uniforme entre 0 et 1. Nous savons que si la variable aléatoire X suit une distribution uniforme entre 0 et 1, alors :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Le revenu espéré du vendeur (équation 10.4) devient donc :

$$E(R) = n\int_{b_0}^{1} (2v-1)v^{n-1}dv = \frac{(n-1) - b_0{}^n(2nb_0 - n - 1)}{n+1}$$

[180] Voir la démonstration donnée en annexe de l'article de Riley et Samuelson (1981).

Supposons maintenant que le vendeur accepte des enchères sans prix de réserve, soit $b_0 = 0$. Son revenu espéré devient alors :

$$E(R) = n\int_0^1 (2v-1)v^{n-1}dv = \frac{n-1}{n+1} \tag{10.5}$$

L'équation (10.5) est l'expression du revenu espéré du vendeur $E(R)$, pour des enchères *sans prix de réserve* lorsque les valeurs subjectives des enchérisseurs suivent une distribution uniforme entre 0 et 1. L'espérance de revenu $E(R)$ est donc une fonction croissante et concave par rapport à n, ce qui donne la représentation graphique de la figure 10.2, avec $n \geq 2$. Ainsi, lorsque le nombre d'enchérisseurs est suffisamment élevé, le revenu espéré du vendeur tend vers le maximum des valeurs subjectives des acheteurs potentiels.

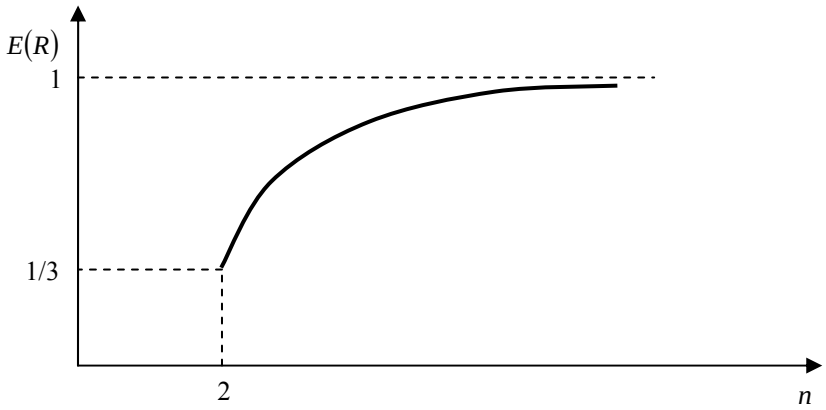


Figure 10.2 : Relation entre l'espérance de revenu du vendeur et le nombre d'acheteurs potentiels

Annexe au chapitre 10

A. La condition du premier ordre est suffisante

Nous montrons que la condition du premier ordre $\frac{\partial \pi(x, v_1)}{\partial x} = v_1 \frac{d\,(F(x))^{n-1}}{d\,x} - P'(x) = 0$ pour $x = v_1$ est bien celle d'un maximum et non celle d'un minimum. On a :

$$\frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{\partial \pi(x, v_1)}{\partial x}\right) = \frac{d\,(F(x))^{n-1}}{d\,x} = (n-1)(F(x))^{n-2} F'(x) > 0 \quad \text{car} \quad F'(x) > 0$$

En d'autres termes, $\frac{\partial \pi(x, v_1)}{\partial x}$ est croissante par rapport à v_1. On peut de ce fait distinguer deux cas :

- Premier cas : $x < v_1$. Comme $\frac{\partial \pi(x, v_1)}{\partial x}$ est croissante par rapport à v_1, alors on a $\frac{\partial \pi(x, x)}{\partial x} < \frac{\partial \pi(x, v_1)}{\partial x}$. Comme de plus, $\frac{\partial \pi(x, x)}{\partial x} = x\,F'(x) - P'(x) = 0$, alors on a $\frac{\partial \pi(x, v_1)}{\partial x} > 0$.
- Deuxième cas : $x > v_1$. De façon similaire, ceci nous donne $\frac{\partial \pi(x, v_1)}{\partial x} < \frac{\partial \pi(x, x)}{\partial x} = 0$.

On a ainsi $x < v_1 \Rightarrow \frac{\partial \pi(x, v_1)}{\partial x} > 0$ et $x > v_1 \Rightarrow \frac{\partial \pi(x, v_1)}{\partial x} < 0$.

En conséquence, $\pi(x, v_1)$ atteint bien un maximum lorsque $x = v_1$.[181]

B. La première intégration par parties

La résolution du second terme nécessite de procéder à une intégration par parties, ce qui donne :

$$\int_{v_*}^{v_1} x\,d(F(x))^{n-1} = x(F(x))^{n-1}\Big|_{v_*}^{v_1} - \int_{v_*}^{v_1} (F(x))^{n-1} dx = v_1(F(v_1))^{n-1} - v_*(F(v_*))^{n-1} - \int_{v_*}^{v_1} (F(x))^{n-1} dx$$

[181] Cette démonstration se base sur la définition de la pseudo concavité des fonctions.

Dans la formule d'intégration par parties $\int wdu = wu - \int udw$, on a posé $w = x$ et $du = d\left(F(x)\right)^{n-1}$.

C. La seconde intégration par parties

On a :

$$\overline{P_1} = \int_{v_*}^{\bar{v}} \left(v_1 \left(F(v_1)\right)^{n-1} - \int_{v_*}^{v_1} \left(F(x)\right)^{n-1} dx \right) F'(v_1) dv_1$$

$$\overline{P_1} = \int_{v_*}^{\bar{v}} v_1 \left(F(v_1)\right)^{n-1} F'(v_1) dv_1 - \int_{v_*}^{\bar{v}} \int_{v_*}^{v_1} \left(F(x)\right)^{n-1} F'(v_1) dx\, dv_1$$

Pour simplifier cette expression, on procède à l'intégration par parties du second terme en posant $w(v_1) = \int_{v_*}^{v_1} \left(F(x)\right)^{n-1} dx$ et $du = F'(v_1) dv_1$, ce qui donne :

$$\int_{v_*}^{\bar{v}} \int_{v_*}^{v_1} \left(F(x)\right)^{n-1} F'(v_1) dx\, dv_1 = \int_{v_*}^{\bar{v}} w(v_1) du = w(v_1) F(v_1) \Big|_{v_*}^{\bar{v}} - \int_{v_*}^{\bar{v}} F(v_1) dw(v_1)$$

$$= w(\bar{v}) F(\bar{v}) - w(v_*) F(v_*) - \int_{v_*}^{\bar{v}} F(v_1) \left(F(v_1)\right)^{n-1} dv_1$$

Sachant que $F(\bar{v}) = 1$ et $w(v_*) = \int_{v_*}^{v_*} \left(F(x)\right)^{n-1} dx = 0$, nous avons :

$$\int_{v_*}^{\bar{v}} \int_{v_*}^{v_1} \left(F(x)\right)^{n-1} F'(v_1) dx dv_1 = w(\bar{v}) - \int_{v_*}^{\bar{v}} \left(F(v_1)\right)^{n} dv_1 = \int_{v_*}^{\bar{v}} \left(F(x)\right)^{n-1} dx - \int_{v_*}^{\bar{v}} \left(F(v_1)\right)^{n} dv_1$$

$$\int_{v_*}^{\bar{v}} \int_{v_*}^{v_1} \left(F(x)\right)^{n-1} F'(v_1) dx dv_1 = -\int_{v_*}^{\bar{v}} \left(F(v_1) - 1\right) \left(F(v_1)\right)^{n-1} dv_1 .$$

Références

Akerlof, G. (1970). The Market for "Lemons": Quality Uncertainty and the Market Mechanism. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 84, Issue 3. P 488-500.

Bhattacharya, S. (1979). Imperfect Information, Dividend Policy, and "The Bird in the Hand" Fallacy. *The Bell Journal of Economics*, Vol. 10, No. 1. P 259-270.

Debreu, G. (1959). *Theory of Value*. New York, Wiley.

Demange, G. et Ponssard, J. P. (1994). *Théorie des jeux et analyse économique*. PUF.

Cho, I-K and Kreps, D. (1987). Signaling game and stable equilibria. *Quarterly Journal of Economics,* Vol. 102. P 179-221.

Friedman, J. (1971). A non-cooperative Equilibrium for Supergames. *Review of Economic Studies*, Vol. 38. P 1-12.

Fudenberg, D. and Tirole, J. (1996). *Game Theory*. The MIT press, Cambridge, Massachusetts.

Gibbons, R. (1992). *A Primer in Game Theory*. Harvester Wheatsheaf.

Gliz, A. (2004). Risque de sous-évaluation et privatisation partielle des entreprises. *Les cahiers du CREAD*, n° 68/69, 2004. P 5-35.

Grossman, S. et Hart, O. (1983). An analysis of the principal-agent problem. *Econometrica*, Vol.51. P 7-45.

Harsanyi, J. (1973). Games with randomly disturbed payoffs: A new rationale for mixed-strategy equilibrium points. *International Journal of Game Theory*, Vol. 2, P 1-23.

Harsanyi, J. (1995). Games with Incomplete Information. *The American Economic Review*, Vol. 85, n° 3. P 291-303.

Holmström, B. (1979). Moral hazard and observability. *Bell Journal of Economics*, 14, 1979. P 74-91.

Jensen, M. and Meckling, W. (1976). Theory of the firm: managerial behaviour, agency costs, and ownership structure. *Journal of Financial Economics*, 3. P 305-360.

Kreps, D and Wilson, R. (1982). Sequential Equilibria. *Econometrica*, Vol. 50, No. 4. P 863-894.

Laffont, J-J. (1991). *Cours de théorie microéconomique. Tome 2 : Economie de l'incertain et de l'information*. Economica.

La Porta, R., Lopez-de-Silanes, F., Shleifer, A. and Vishny, R. (1998). Law and Finance. *Journal of Political Economy*, Vol. 106, n° 6. P 1113-1155.

Levhari, D. and Mirman, L. J. (1980). The great fish war : An example using a dynamic Cournot-Nash solution. *Bell Journal of Economics*, P.322-334.

Malinvaud, E. (1982). *Leçons de micro-économie*. Dunod.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D. and Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory*. Oxford University Press. New-York.

Milgrom, P. and Weber, R. (1982). A theory of auctions and competitive bidding. *Econometrica*, Vol. 50. P 1088-1122.

Mirrless, J. A. (1971). An exploration in the theory of optimal income taxation. *Review of Economic Studies*, Vol. 38. P 175-208.

Modigliani, F. and Miller, M. (1958). The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. *The American Economic Review*, Vol. 48. P 261-297.

Modigliani, F. and Miller, M. (1963). Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: a Correction. The *American Economic Review,* 53. P 433-443.

Myerson, R. B. (1981). Optimal Auction Design. *Mathematics of Operations Research*, Vol. 6. P 58-73.

Naegelen, F. 1988). Les mécanismes d'enchères. *Economica*, 1988.

Nash, J. F. (1950). Equilibrium points in *n*-person games. *Proceedings of the National Academy of sciences,* 36: 48-49.

Osborne, M. J. (2002). *An introduction to game theory*. Oxford University Press. (version web).

Riley, J. (2001). Silver Signals: Twenty-Five Years of Screening and Signaling. *Journal of Economic Literature*, Vol. 39. P 423-478.

Riley, J. and Samuelson, W. (1981). Optimal Auctions. *The American Economic Review*, Vol. 71, n° 3. P 381-392.

Rogerson, W. (1985). The first-order approach to principal-agent problems. *Econometrica*, 53. P 1357-1368.

Ross, S. (1977). The Determination of Financial Structure: The Incentive-Signalling Approach. *The Bell Journal of Economics*, Vol. 8, No. 1. P 23-40.

Rothschild, M. and Stiglitz, J. (1976). Equilibrium in Competitive Insurance Markets: an Essay on the Economics of Imperfect Information. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 90. P 629-649.

Salanié, B. (1994). *Théorie des contrats*. Economica, 1994. Paris.

Schelling, T. (1960). *The Strategy of Conflict*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Selten, R. (1975). Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games. *International Journal of Game Theory*, Vol. 4. P 25-55.

Spence, M. (1973). Job Market Signalling. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 87. P 296-332.

Stiglitz, J. and Weiss, A. (1981). Credit Rationing in Markets with Imperfect Information. *The American Economic Review*, Vol. 71, n° 3. P 393–410

Thakor, A. (1991). Game Theory in Finance. *Financial Management*, Spring 1991. P 71-94.

Tirole, J. (1988). *The Theory of Industrial Organisation*. The MIT press, 1988.

Tirole, J. (2001). Corporate Governance, *Econometrica*, 69. P 1-35.

Viala, P. and Briys, E. (1995). *Eléments de théorie financière*. Nathan.

Vichrey. W. (1961). Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders. *The Journal of Finance*, Vol. 16. P 8-37.

Exercices

1-) Soit le jeu simultané à information complète suivant (jeu sous forme normale) :

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0 , 7	2 , 5	7 , 0	1 , 5
A_2	5 , 2	3 , 3	5 , 2	3 , 2
A_3	7 , 0	2 , 5	5 , 7	4 , 4
A_4	0 , 0	0 , -2	0 , 0	10 , -1

1. Donnez la définition formelle de l'équilibre de Nash d'un jeu simultané en information complète.
2. Déterminez l'équilibre de Nash de ce jeu.
3. Quelle interprétation donnez-vous au concept de l'équilibre de Nash ?
4. Après avoir donné la définition de l'équilibre de Pareto, dites si cet équilibre est Pareto optimal ? Le cas échéant, qu'est ce qui empêche les deux joueurs d'atteindre un équilibre Pareto optimal ?

2-) Déterminer l'équilibre de Nash du jeu simultané à information complète suivant (jeu sous forme normale) :

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5 , 6	2 , 2	6 , 1	4 , 0
A_2	4 , 6	3 , 2	0 , 2	4 , 6
A_3	0 , 0	5 , 5	9 , 0	1 , 3
A_4	7 ,5	6 , 8	3 , 6	2 , 9

3-) Supposons qu'il existe 3 firmes dans le modèle d'oligopole de Cournot. Soit q_i la quantité produite par la firme i et $Q = q_1 + q_2 + q_3$ dénote la quantité totale du marché. Le prix d'équilibre P est donné par l'équation $P = P(Q) = a - Q$ avec $Q < a$. Le coût total de la firme i est donné par l'équation $C_i = C_i(q_i) = cq_i$ avec $c < a$.

1. Si les trois firmes disposent de toutes ces informations et choisissent la quantité à produire q_i de façon simultanée, quel est l'équilibre de Nash d'un tel jeu ?
2. Comparer le prix d'équilibre et le profit de la firme i dans les deux cas où le nombre de firmes est de deux ou de trois ?

4-) Jeu de négociation. Deux personnes sont en négociation pour le partage d'un dinar. De façon simultanée, chacun des deux joueurs annonce la part qu'il veut obtenir. Soient s_1 et s_2 l'annonce respectivement de la personne 1 et de la personne 2 avec $0 \le s_1 \le 1$ et $0 \le s_2 \le 1$. Si $s_1 + s_2 \le 1$, alors chaque joueur obtient la part qu'il a annoncée et si $s_1 + s_2 > 1$, chaque joueur obtient 0.

Ces informations étant connaissance commune pour les deux joueurs, déterminer les équilibres de Nash de ce jeu. Parmi ces équilibres, quel est le plus plausible? Pourquoi?

5-) Modèle de Stackelberg. On considère un marché où existent deux firmes et on souhaite prédire son équilibre. La firme 1 est le leader et choisit la quantité à produire $q_1 \geq 0$ en premier. La firme 2 est le follower et choisit la quantité à produire $q_2 \geq 0$ après avoir observé la quantité produite $q_1 \geq 0$ de la firme 1. Le coût de production unitaire du bien est constant et égal à 10 pour la firme 1 et 14 pour la firme 2. Le prix d'équilibre du marché est déterminé selon l'expression suivante : $P(Q) = 100 - Q$ avec $Q = q_1 + q_2$.

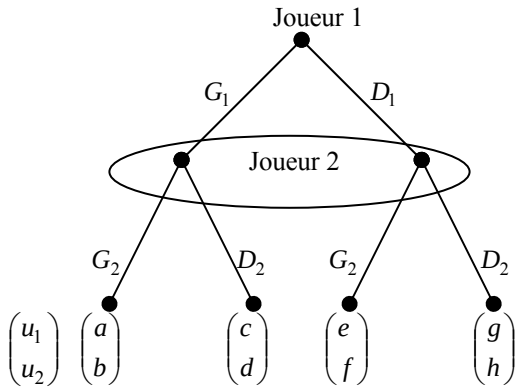
Déterminer la quantité à produire de chaque firme et le prix d'équilibre du marché. Quelle est la méthode de résolution utilisée pour obtenir l'équilibre de Nash parfait?

6-) Modèle de Stackelberg. Considérer le modèle de Stackelberg et trouver l'équilibre du jeu si $c_1 > c_2$, c'est-à-dire si le follower (joueur 2) peut produire à un coût unitaire plus faible. Considérer que les coûts sont tels que $c_1 = ac_2$ avec $a > 1$. Quelle est la valeur de *a* telle que les deux firmes produisent la même quantité. Quelle est votre interprétation de ce résultat en terme de leadership dans un marché ?

7-) Financement d'un bien public. Considérons une situation où existent deux consommateurs $i = 1, 2$. Chacun d'eux choisit librement et simultanément de contribuer pour un montant x_i au financement d'un bien public. L'utilité qu'obtient l'individu *i* en utilisant le bien public est donnée par $u_i(x_1 + x_2) - x_i$. La contribution totale $X = x_1 + x_2$ est représentative de la taille du bien public. La fonction d'utilité $u(\cdot)$ est telle que $u(0) = 0$, $u'(0) > 1$, $u' > 0$, $u'' < 0$ et $\lim_{x \to \infty} u'(x) < 1$.

a) Représenter graphiquement la fonction d'utilité $u(\cdot)$.
b) Montrer que l'équilibre de Nash de ce jeu est tel que $u'(X^*) = 1$.
c) Sachant que la fonction d'utilité sociale est donnée par $2u(X) - X$, montrer que l'optimum social est caractérisé par $u'(X^{**}) = \frac{1}{2}$.
d) En déduire que $X^{**} > X^*$.
e) Quel enseignement il en sort en termes de financement des biens publics.

8-) Forme normale et forme extensive. Soit le jeu simultané à information complète suivant (version1) :

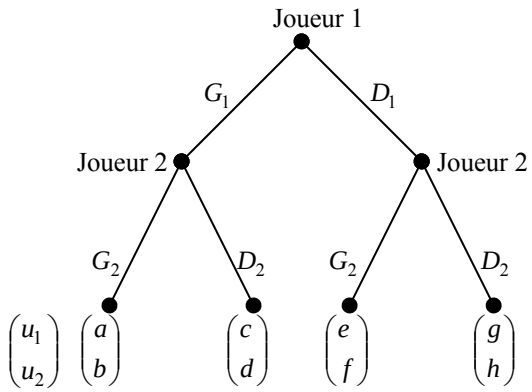


Version 1

a) Représenter ce jeu par une matrice des paiements d'un jeu sous forme normale.

b) Quelles sont les conditions sur les paiements pour que le profil de stratégies (D_1, G_2) soit un équilibre de Nash pour ce jeu ?

Considérons maintenant la version 2 de ce jeu :



Version 2

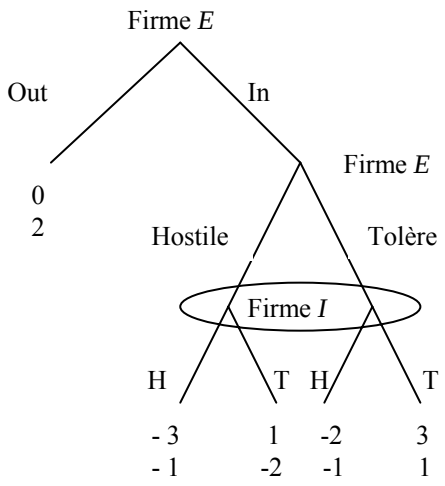
c) Quelle est la nature de la modification apportée à la version 2 du jeu par rapport à la version 1 ?

d) A-t-on les mêmes conditions que dans b) pour que les actions (D_1, G_2) soient sur le sentier d'équilibre ?

9-) Considérons le jeu de prédation suivant qui fait intervenir 2 firmes, la firme *E* (Entrant) souhaitant entrer dans un marché et la firme *I* (Incumbent) ayant actuellement le monopole ou la domination du marché. Il s'agit d'un jeu dynamique qui se déroule en deux étapes.

- Première étape : la firme *E* doit décider soit d'entrer ou de ne pas entrer dans le marché.
- Deuxième étape : Si la firme *E* décide d'entrer, alors les deux firmes *E* et *I* doivent choisir simultanément et en situation d'information complète soit de tolérer soit d'être hostile en engageant une guerre des prix.

Cette situation de jeu est représentée par la forme extensive suivante :



a) Donner la forme normale du jeu sachant que la firme *E* dispose des quatre stratégies suivantes : 1) (Out, Tolère si In) ; 2) (Out, Hostile si In) ; 3) (In, Tolère si In) ; 4) (In, Hostile si In).
b) Quel est l'Equilibre de Nash Parfait de ce jeu ?
c) Quelle exigence supplémentaire doit satisfaire l'Equilibre de Nash dans un jeu dynamique ?

10-) Duopole de Cournot et incertitude de la demande. Considérons le cas de deux firmes en concurrence. La fonction de demande inverse est $P(Q) = a - Q$ où $Q = q_1 + q_2$ est la quantité totale offerte par les deux firmes. Chacune des deux firmes choisit une quantité à produire q_i avec i = 1, 2 et avec comme objectif la maximisation de son profit. Le coût marginal des deux firmes est identique et égal à c. La firme 1 a une asymétrie d'information par rapport au niveau de la demande. Pour cette firme, la demande peut être élevée avec probabilité θ ou faible avec probabilité $1-\theta$. La demande élevée signifie $a = a_H$ et la demande faible $a = a_L$. La firme 2 par contre sait avec certitude si la demande est élevée ou faible. Toutes ces données sont information commune et les deux firmes choisissent les quantités de façon simultanée.

Trouver l'équilibre de Nash Bayesien de ce jeu en faisant ressortir les conditions sur a_H, a_L, θ et c pour que les quantités d'équilibre soient positives.

11-) G. Akerlof. A travers son article "The Market for "Lemons": Quality Uncertainty and the Market Mechanism" de 1970, montrer quels sont les principaux apports de G. Akerlof à l'économie de l'information ?

12-) Considérer le phénomène de sélection adverse mis en évidence par G. Akerlof (1970). Montrer comment ce phénomène peut exister dans la relation d'assurance entre une

compagnie d'assurance et un individu. Quels en sont les conséquences et les mécanismes pouvant être des solutions possibles ?

13-) Considérons un marché de voitures d'occasion dans lequel les acheteurs et les vendeurs ont les prix subjectifs suivants :

v_v^b : Prix subjectif d'un vendeur pour une bonne voiture d'occasion : 2.000

v_v^m : Prix subjectif d'un vendeur pour une mauvaise voiture d'occasion : 1.000

v_a^b : Prix subjectif d'un acheteur pour une bonne voiture d'occasion : 2.400

v_a^m : Prix subjectif d'un acheteur pour une mauvaise voiture d'occasion : 1.200

Les acheteurs ne peuvent observer la qualité (bonne ou mauvaise) des voitures d'occasion, mais estiment que 50% des véhicules sont de bonne qualité et 50% de mauvaise qualité.

1. quel est le prix maximum que les acheteurs sont prêts à payer pour une voiture d'occasion ?
2. Quelle (s) est (sont) la (les) qualité (s) échangée (s) et la fourchette des prix ?

14-) Sélection adverse en assurance. En vous référant à l'analyse du marché de l'assurance en cas d'asymétrie de l'information de Rothschild, M. & Stiglitz, J. (1976), montrer comment les prix linéaires d'assurance impliquent l'apparition du phénomène de sélection adverse dans lequel les individus à faible risque s'assurent de façon sous optimale.

15-) En vous référant à l'analyse du marché de l'assurance en cas d'asymétrie de l'information de Rothschild, M. & Stiglitz, J. (1976), discuter de l'évolution du concept d'équilibre du marché, en particulier en expliquant les concepts d'équilibres séparateurs et d'équilibres non séparateurs.

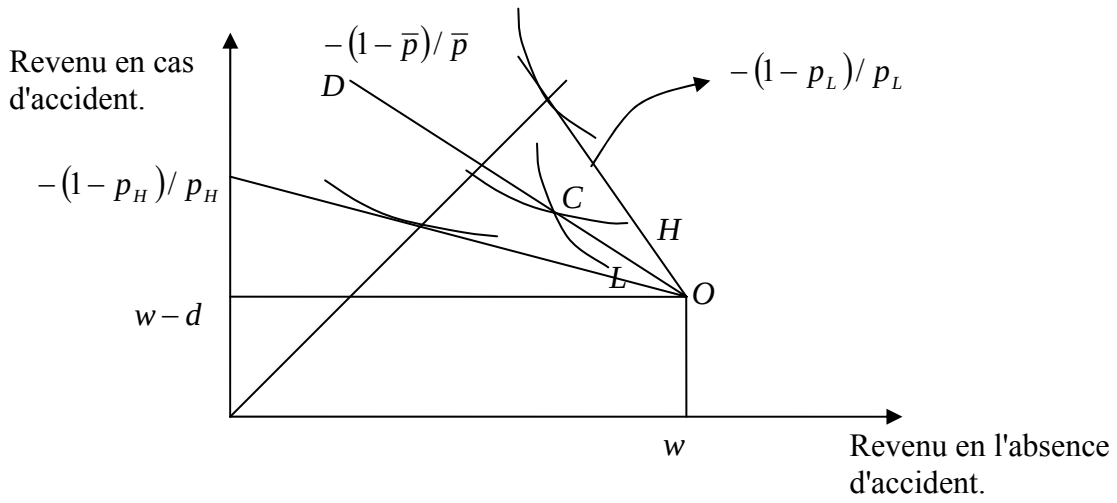
16-) Equilibre de sélection adverse. Considérons une situation d'échange entre une entreprise et un consommateur. La qualité du produit à échanger peut être élevée –*H*- ou faible –*L*. Le consommateur ne peut observer la qualité du produit avant son achat mais dispose de la croyance que la qualité du produit est du type *H* avec probabilité λ. Le coût de production du produit du type *H* est C_H et celui du type *L* est C_L avec $C_H > C_L$. Le consommateur désire acheter au plus une unité du produit. Le prix de marché *p* est un prix régulé avec $v_H > p > v_L > C_H > C_L$.

Montrer qu'à l'équilibre (de Nash), seule la qualité *L* est échangée. Quelle est la condition sur λ pour l'existence d'un tel équilibre ?

17-) Asymétrie d'information et équilibre du marché des assurances. La figure suivante montre le cas d'une compagnie d'assurance faisant face à une asymétrie d'information relative à la probabilité d'accident des individus. Cette probabilité peut être élevée (p_H) ou faible (p_L). Supposons que cette compagnie propose un contrat d'assurance à prix non linéaire

représenté par le point C sur la droite OD de pente $-(1-\overline{p})/\overline{p}$ où $\overline{p}$ est la probabilité d'accident moyenne.

1. Montrer à partir de ce schéma pourquoi un tel contrat n'est pas robuste à la concurrence.
2. Ce contrat est-il un contrat mélangeant ou séparant ? Quelle est la signification de ces types d'équilibre ?



18-) Aléa moral et financement. Soit le cas d'une entreprise souhaitant réaliser un investissement d'un coût initial de 3000. Le revenu généré par ce projet est de 4500 en cas de succès et de 0 en cas d'échec. La probabilité de succès est de 0,7 si le manager se comporte honnêtement et de 0,5 s'il ne se comporte pas honnêtement. Dans cette seconde alternative, le manager obtient des bénéfices privés de 700. Cette entreprise ne dispose pas de toutes les ressources financières nécessaires pour réaliser cet investissement. Elle doit donc recourir à un financement externe.

- Quel est l'apport minimum qu'exigera le financier externe pour accepter de participer au financement de cet investissement ?
- Comment qualifiez-vous cette situation ?
- Quelle est, dans cet exemple, la raison qui incite ce financier à exiger une participation financière minimale de l'entreprise ?
- Comment situez-vous cette raison par rapport aux thèses de Modigliani & Miller (1958) ?

19-) La garantie comme signal de qualité. Considérons un marché de voitures d'occasion dans lequel les acheteurs et les vendeurs ont les prix subjectifs suivants :

v_v^b : Prix subjectif d'un vendeur pour une bonne voiture d'occasion : 2.000

v_v^m : Prix subjectif d'un vendeur pour une mauvaise voiture d'occasion : 1.000

v_a^b : Prix subjectif d'un acheteur pour une bonne voiture d'occasion : 2.400

v_a^m : Prix subjectif d'un acheteur pour une mauvaise voiture d'occasion : 1.200

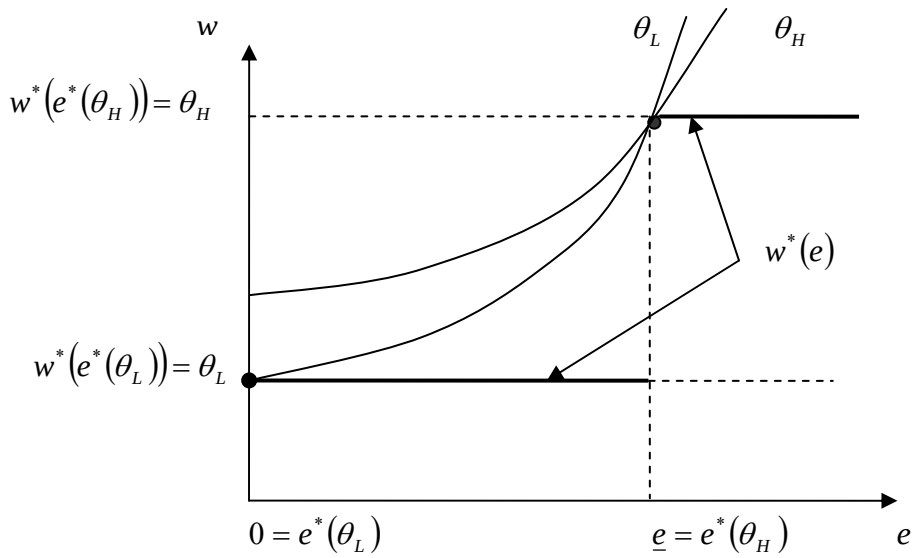
Les acheteurs ne peuvent observer la qualité (bonne ou mauvaise) des voitures d'occasion. Mais les vendeurs de voitures ont la possibilité de *signaler* la qualité de leur voiture, ceci par la proposition d'une garantie qui les oblige à remplacer toute pièce défectueuse pendant une période d'une année. Supposons qu'en moyenne, la garantie coûte 300 par an pour une bonne voiture et 1.300 pour une mauvaise voiture. Supposons également que le marché de voitures est un marché de vendeurs (les prix s'établissent à la borne supérieure de l'intervalle de négociation).

Montrez que les propriétaires de bonne voiture peuvent signaler la qualité de leur voiture en offrant une garantie d'une année. (Indication : vérifier si les vendeurs de mauvaise voiture sont incités à imiter les vendeurs de bonne voiture, c'est-à-dire à proposer une garantie d'une année).

20-) Jeu de signal. Considérons un jeu dans lequel à la première étape, la nature procède au tirage aléatoire du type (capacité productive) de chaque travailleur à partir d'une distribution de probabilité continue sur $[\overline{\theta}, \underline{\theta}]$. A la seconde étape du jeu, chaque travailleur observe son type qui est son information privée et doit décider s'il accepte de passer ou non un test *sans coût* qui révèle *parfaitement* son type. A la troisième étape, des firmes en concurrence observent si le travailleur a accepté ou non de passer le test ainsi que le résultat du test et proposent un salaire pour le recrutement du travailleur.

Montrer que dans un équilibre Bayesien parfait, les travailleurs de tout type acceptent de passer le test et les firmes offrent un salaire non supérieur à $\underline{\theta}$ pour tout travailleur n'ayant pas accepté de passer le test. (Indication : assurez-vous que les participants à ce jeu ne sont pas incités à dévier de cet équilibre en spécifiant convenablement les croyances à l'équilibre).

21-) Considérer l'équilibre de signal suivant du modèle de Spence (1973) :

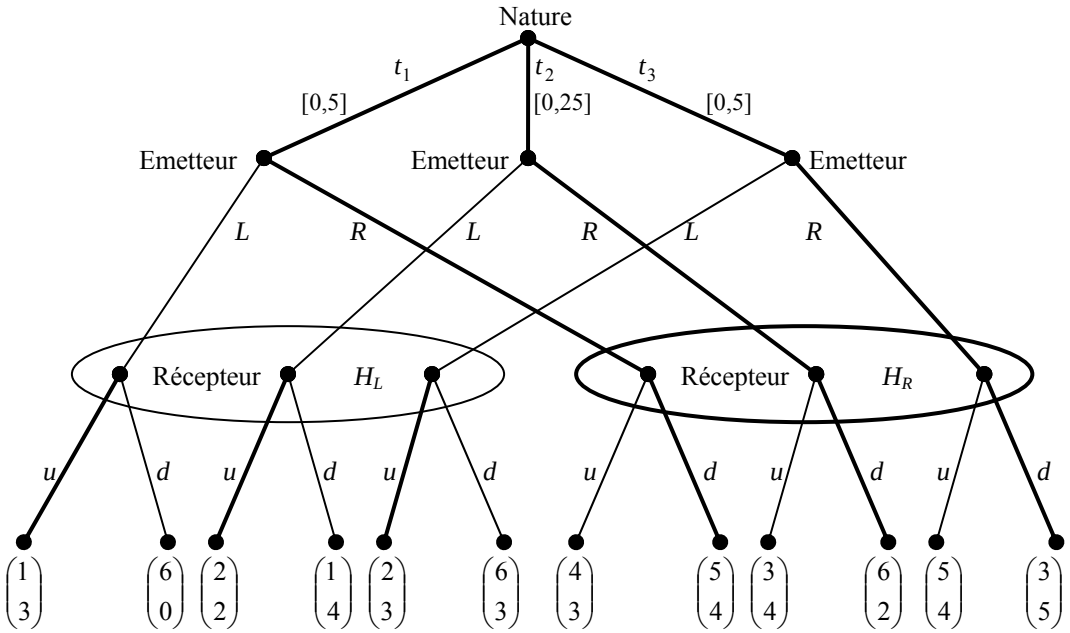


1. S'agit-il d'un équilibre séparateur ou d'un équilibre mélangeant ?
2. Expliquez comment le signal est une réponse possible au problème de sélection adverse.
3. Donnez les caractéristiques de l'équilibre de signal décrit dans la figure ci-dessus.
4. Montrez l'importance de la *single crossing property* dans la définition de la notion d'équilibre de signal.
5. Faites ressortir l'origine de cette propriété dans la fonction de coût de l'éducation.

22-) Modèle de signal de Spence. Dans le cadre du modèle de Spence (1973), montrer en détaillant quelle est la condition et sa conséquence centrales qui rendent possible que le niveau d'éducation soit un signal crédible de la productivité du travailleur.

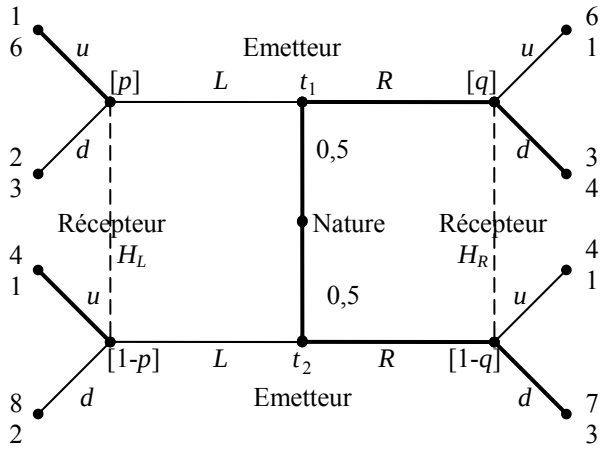
23-) Considérer le jeu de signal décrit dans la figure suivante :

1.) Montrer que le couple stratégies / croyances $[(R, R, R); (u, d); \mu(t_1 / R) = 0{,}5; \mu(t_2 / R) = 0{,}25; \mu(t_3 / R) = 0{,}5; \mu(t_1 / L) = 0{,}4; \mu(t_2 / L) = 0{,}3; \mu(t_3 / L) = 0{,}3]$ est un équilibre bayésien parfait au sens faible.
2.) Au regard des critères de domination, peut-on le considérer comme étant un équilibre raisonnable ?
3.) Obtient-on les mêmes résultats si les croyances hors équilibre étaient « structurellement consistantes » ?



24-) Considérer le jeu de signal décrit dans la figure suivante :

1.) Montrer que le couple stratégies / croyances $[(R, R); (u, d); q = 0{,}5; p]$ avec $p > \frac{1}{4}$ est un équilibre bayésien parfait au sens faible mélangeant en R.
2.) Au regard des critères de domination, peut-on le considérer comme étant un équilibre raisonnable ?
3.) Obtient-on les mêmes résultats si les croyances hors équilibre étaient « structurellement consistantes » ?



25-) Les enchères. Donnez les arguments montrant que les enchères appartiennent à la classe des jeux Bayesiens. Décrivez ce mécanisme en utilisant les concepts de cette classe de jeux.

26-) L'enchère au second prix. Dans l'enchère au second prix (enchère de Vickrey), les enchères b_i sont soumises sous pli cacheté. L'objet est attribué à l'enchérisseur qui propose l'offre la plus élevée et le prix à payer est égal à la deuxième offre la plus élevée. Les évaluations subjectives v_i pour l'objet des acheteurs potentiels i sont privées et indépendantes entre elles. Montrer que l'annonce de leur véritable évaluation de l'objet est une stratégie dominante pour les enchérisseurs, ce qui donne $b_i^* = v_i$.